

Klassifikation der geschlossenen orientierten zweidimensionalen Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

Andreas Zastrow

Bochum 1989



Klassifikation der geschlossenen orientierten zweidimensionalen Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

Andreas Zastrow

Bochum 1989

	Einleitung	1
A	Begriffsbildungen, Standardbeispiele und Geometrie der strukturierten Mannigfaltigkeiten	14
A.1	Definition der (wohl)strukturierten Mannigfaltigkeit	14
A.2	Beispiele für Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur	17
A.3	Die Geometrie der strukturierten Mannigfaltigkeiten	28
A.4	Die Topologie der geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit (Aut(C), C)-Struktur	35
A.5	Das Gauß-Bonnet-Theorem für zweidimensionale Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten	36
B	Klassifikation der Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung	40
B.1	Die Holonomie	41
B.2	Vergrößerungsfaktoren	51
B.3	Umlaufwinkel	55
B.4	Unterschiede in der Geometrie der in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori	68
B.5	Fundamentalebereiche der Ähnlichkeitstori	74
C	Die Hilfsmittel bei der Klassifikation wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten im metrischen Fall	77
C.1	Die induzierte Metrik bei strukturierten Mannigfaltigkeiten	77
C.2	Globale Karten und WST-Vollständigkeit	81
C.3	Vollständigkeitskriterien	86
D	Die Klassifikation der Ähnlichkeitstori	93
D.1	Kategorien und Kategorietransformationen strukturierter Mannigfaltigkeiten	93
D.2	Klassifikation der geschlossenen Flächen mit echter Ähnlichkeitsstruktur	98

Inhaltsverzeichnis

D.3	Die Bijektivität von $\overline{\Gamma_{(\bar{C}^*, \bar{C}^*)}^{(C^*, C^*)}}$ und von $\overline{\Gamma_{(\text{Aut}(C), C)}^{(C^*, C)}}$	100
D.4	Die Bijektivität von $\overline{\Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)}}$	103
D.5	Zusammenfassung der Klassifikation	109
D.6	Die $\text{Aut}^{\sim}(C)$ -Holonomie	110
E	Beziehung zwischen den Ähnlichkeitstori und den riemannschen Flächen	114
E.1	Untersuchung der Kategorietransformation $\Gamma : \text{WST}(\text{Aut}(C), C) \rightarrow \text{ST}(C^{\omega}, C)$	114
E.2	Die Geometrie der euklidischen Ähnlichkeitstori	119
E.3	Liste der Ähnlichkeitstori	120

KLASSIFIKATION DER GESCHLOSSENEN ORIENTIERTEN ZWEIDIMENSIONALEN ÄHNLICHKEITSMANNIGFALTIGKEITEN

Abstract: In this paper we consider two-dimensional closed oriented (G, X) -similarity-manifolds, i.e. manifolds M with a structure induced by an atlas whose transition mappings are similarities defined as restrictions of the transformations contained in the group G acting on X . We classify and describe all closed $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -manifolds with $\text{Aut}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto a \cdot z + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}$. In particular, we show that all these manifolds are tori and that their universal cover is either $\mathbb{C}$ or the universal cover $\tilde{\mathbb{C}}^*$ of $\mathbb{C}^*$, where $\mathbb{C}$ and $\tilde{\mathbb{C}}^*$ are manifolds with different $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -structure. We show that all closed oriented $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -manifolds can be generated by a fundamental domain, i.e. by identifying segments of the boundary of a cell B which is embedded in $\mathbb{C}$ and adapts its geometry. Further we generalize the concept of holonomy and define a lift of all holonomy groups of similarity tori to the universal cover of $\text{Aut}(\mathbb{C})$. This yields a homogeneous concept to classify all similarity structures of tori, which cannot be done homogeneously by the concept of holonomy for structured manifolds originally suggested by Thurston. We also point out essential differences of the geometries of all non-equivalent similarity-structures of tori. In the "Einleitung" we describe a situation where the knowledge of similarity structures of two-dimensional manifolds helps to prove the existence of hyperbolic structures on three-dimensional manifolds.

Einleitung :

0.1 Zur Motivation: Im Jahre 1904 stellte Poincaré (vgl. [Poi2]), nachdem sich eine 4 Jahre zuvor aufgestellte weitreichendere Vermutung (vgl. [Poi1]) von ihm als falsch herausgestellt hatte, die Frage, ob eine geschlossene dreidimensionale Mannigfaltigkeit bereits dann die Drei-Sphäre sein müsse, wenn sie verschwindende Fundamentalgruppe hat. Dies ist bis heute unbeantwortet. Als "Poincarésche Vermutung" bezeichnet man die Aussage, diese Frage sei positiv zu beantworten. Diese Vermutung, die die Charakterisierbarkeit der einfachsten geschlossenen dreidimensionalen Mannigfaltigkeit behauptet, ist freilich nur ein kleiner Teil des noch viel größeren ungelösten Problems der Klassifikation aller geschlossener dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten überhaupt. W. P. Thurston brachte Ende der siebziger Jahre die Idee ins Spiel, obwohl es bei der Klassifikation der dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten ja nur um eine Klassifikation nach dem Homöomorphietyp geht, auf Mannigfaltigkeiten auch Geometrien zu betrachten ([Th0]). Thurston war dabei zuversichtlich, vermuten zu können ("I feel fairly confident in proposing the conjecture" [Th1]), daß sich jede Mannigfaltigkeit in

hinreichend kleine Bausteine zerlegen läßt, auf denen stets eine von acht ausgezeichneten Geometrien erklärt ist (Thurston's "Geometrisierungsvermutung", siehe [Th1] oder [Sc]). Auf Mannigfaltigkeiten mit Geometrien wiederum ergeben sich grundsätzlich gewisse Ansätze, die in zahlreichen Fällen zu ihrer Klassifikation führen. So kann in jeder der acht ausgezeichneten Geometrien die Frage der Klassifikation der Mannigfaltigkeiten mit diesen Geometrien auf eine Diskussionen der diskontinuierlich frei operierenden Untergruppen der jeweiligen Strukturgruppen dieser Geometrie zurückgeführt werden. Die dazu benötigte Theorie werden wir auch im Zuge unserer Arbeit im Abschnitt C und §B.1, vgl. insbes. C.2.8, entwickeln. In sieben der acht Fälle ist auf die Weise bereits eine Klassifikation geglückt ([Sc]); allerdings müssen wir an dieser Stelle auch bemerken, daß diese sieben Fälle im Zuge der Theorie der Geometrisierungsvermutung die Rolle von Ausnahmefällen spielen, während der verbleibende achte Fall der Mannigfaltigkeiten mit hyperbolischer Geometrie als der eigentliche Hauptfall gilt.

Thurston selbst hat seine Geometrisierungsvermutung für eine Reihe von Unterfällen bestätigt. Insbesondere hat er hyperbolische Strukturen nachgewiesen auf allen Haken-Mannigfaltigkeiten und allen Mannigfaltigkeiten mit Rand, sofern sie keine weitere Zerlegung in kleinere Bausteine im Sinne der Geometrisierungsvermutung zulassen ([Th1],[Th2]). Außerdem hat Thurston gezeigt, daß diejenige hyperbolische Struktur, die es auf den Außenräumen von Verkettungen (von Knotenlinien in der S^3) nach dem eben zitierten Ergebnis zumindest auf den Außenräumen von Knoten, die keine Satellitenknoten sind, geben muß, sich für jede solche Verkettung auf fast alle daraus durch Dehn-Surgery entstehenden Mannigfaltigkeiten fortsetzen läßt. ([Th1],[Th0]). Da nach einem Ergebnis von Lickorish ([Li]) jede Drei-Mannigfaltigkeit als Dehn-Surgery einer Verkettung dargestellt werden kann und da auch zu allen bekannten Drei-Mannigfaltigkeiten, die nicht unter die eben zitierten Sätze fallen, Geometrien bekannt sind, erscheint die Geometrisierungsvermutung plausibel, obgleich auch Thurston selber, trotz aller Zuversicht, mit keinem schnellen Beweis der noch offenen Fragen rechnet [Th1].

Obwohl Thurston's weiter oben zitierte Ergebnisse in der Fachwelt weitgehend anerkannt sind, sollte nicht übersehen werden, daß Thurston seine Ideen zum großen Teil nur in Form von Preprints und Übersichtsarbeiten zu Papier gebracht hat. Von daher besteht der Wunsch nach einer exakteren Begründung seiner Ergebnisse durchaus. Insofern werden im Rahmen dieser Dissertation keine Ergebnisse von Thurston vorausgesetzt, sondern, soweit wir sie hier brauchen, entwickelt, z.T. mit abgeschwächten oder verschärften Voraussetzungen.

Thurston schlägt in seiner Arbeit [Th0] ein Konzept vor, um Mannigfaltigkeiten mit verschiedenen Geometrien mitunter einheitlich behandeln zu können. Dieses Konzept wird bereits an dieser Stelle verständlich, wenn man sich gewisse Parallelitäten, die sich bei der Definition der riemannschen Flächen einerseits und der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten andererseits ergeben, vor Augen führt: beide Begriffe arbeiten mit Kategorien, deren Objekte Mannigfaltigkeiten mit ausgezeichneten Atlanten sind, und der Unterschied zwischen diesen beiden Begriffen besteht im wesentlichen nur darin, in welche "Grundmannigfaltigkeiten" die Koordinatenabbildungen dieser Atlanten abbilden

müssen ($\mathbb{C}$ im einen Fall und $\mathbb{R}^n$ im anderen) und in dem jeweiligen Verträglichkeitsbegriff, der für die Karten dieser Atlanten gefordert wird (die Übersetzungsabbildungen müssen im ersten Fall holomorph und im zweiten nur differenzierbar sein). Thurston greift dieses Konzept, Mannigfaltigkeiten mit maximalen Atlanten zu betrachten, dann auf, und ersetzt die Grundmannigfaltigkeit durch einen in den allgemeinen Betrachtungen noch nicht spezifizierten Raum " X " und die Verträglichkeitsbedingungen der Karten durch die Forderung, daß die Übersetzungsabbildungen aus einer in der allgemeinen Theorie noch nicht spezifizierten Gruppe " G " oder Pseudogruppe stammen (vgl. Definition A.1.2–A.1.4/A.1.9). Indem man z.B. für X den H^n und für G die Gruppe der hyperbolischen Bewegungen einsetzt, erhält man so die Definition der "hyperbolischen Mannigfaltigkeiten".

Obwohl diese Definition eigentlich vorsieht, daß offene Teilmengen von offenen Mengen identifiziert werden, kann man eine hyperbolische Mannigfaltigkeit M auch konstruieren, indem man konvexe Zellen des hyperbolischen Raumes (entstanden durch Schnitte endlich vieler Halbräume des H^n) durch Identifikation kongruenter Oberflächen zusammenklebt. Auf die Weise entsteht eine hyperbolische Struktur, wenn für jeden Stern von M eine Einbettung des Sterns in den H^n in dem folgenden Sinne möglich ist: Entsteht ein Stern durch Verklebung der Zellen $B_1, B_2, \dots, B_n$, und zwar so, daß für alle $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ die Seite $B_{i,j}$ der Zelle B_i mit der Seite $B_{j,i}$ der Zelle B_j zu identifizieren ist, so müssen hyperbolische Bewegungen $h_1, h_2, \dots, h_n$ existieren, sodaß $h_i(B_i) \cap h_j(B_j) = h_i(B_{i,j}) = h_j(B_{j,i})$ ist und daß $h_j \circ h_i^{-1} : B_{i,j} \rightarrow B_{j,i}$ die bei der genauen Definition von M zu fixierende Identifikationsabbildung zwischen B_i und B_j beschreibt. Während es kaum ein griffiges Konzept gibt, die Einbettbarkeit eines Eckensterns in den H^3 festzustellen, ist dies für einen Kantenstern schon eher möglich. Die Einbettbarkeit eines Kantensterns ist gewährleistet,

- ▷ wenn bei allen Zellen B_k , die durch Identifikation eine gemeinsame Kante bekommen sollen, zu jeder der an die zu identifizierende Kante angrenzenden Flächen genau eine damit zu verklebende Partnerfläche definiert ist,
- ▷ wenn diese Identifikationen es ermöglichen, die Raumstücke vom kombinatorischen Standpunkt aus in einem Stern um die Kante anzuordnen,
- ▷ wenn die zugehörigen Klebeabbildungen hyperbolische Bewegungen sind,
- ▷ wenn die Summe der Ebenenschnittwinkel, die jeweils in den Zellen B_k zwischen den beiden zu der zu identifizierenden Kante benachbarten Oberflächen auftreten, -2π ist,
- ▷ wenn die Identifikationsvorschriften der Oberflächen der Zellen B_k als Folgeidentifikation keine Selbstverklebung der gemeinsamen Kante zu einer S^1 verursachen.

Von daher ergibt sich ein Weg, hyperbolische Strukturen auf der Klasse von Mannigfaltigkeiten nachzuweisen, die sich durch metrische Vervollständigung derjenigen Mannigfaltigkeiten gewonnen werden können, die sich aus idealen Tetraedern verkleben lassen. Als "ideale Tetraeder" bezeichnet man die konvexe Hülle zweier windschiefer Geraden im H^3 , einer Figur also, die an einen Tetraeder erinnert, dessen Eckpunkte im unendlich Fernen liegen.

Soll nach diesem Konzept in einem konkreten Fall, d.h. bei einer vorgegeben Klebevorschrift von idealen Tetraedern, eine hyperbolische Struktur nachgewiesen werden, so gilt es zu erkennen,

- ▷ wie sich die idealen Tetraeder in der Umgebung einer Ecke zusammenlegen,
- ▷ ob bei einer metrischen Vervollständigung überhaupt Punkte hinzukommen,
- ▷ wenn ja, welche und wieviele Punkte,
- ▷ ob diese Punkte den Umgebungstyp einer Mannigfaltigkeit haben,
- ▷ ob sich die hyperbolische Geometrie widerspruchsfrei auf diese Punkte fortsetzen läßt,
- ▷ und schließlich, wie das Hinzunehmen dieser Punkte den Homöomorphietyp der Mannigfaltigkeit verändert.

Thurston selbst zeigt in seiner Arbeit, daß fast alle Dehn-Surgeries des Außenraums des Vierknotens auf die Art mit einer hyperbolischen Struktur versehen werden können, und Betley et al. ([BPZ]) zeigen dies für einige andere Außenräume; das vorhin zitierte Resultat von Thurston für die Dehn-Surgeries allgemeiner Knotenaußenräume bedarf freilich eines etwas allgemeineren Ansatzes.

Die zugrundeliegende Theorie, die bei der Beantwortung der im vorletzten Satz gestellten Fragen nötig ist und die in [BPZ] vorausgesetzt und benutzt wird, wird in Thurston's Arbeit freilich nur sehr knapp und skizzenhaft dargestellt, sodaß ein Bedürfnis nach einer genaueren Ausführung der Beweise einschließlich einer Präzisierung der dabei benutzten Begriffe entsteht. Diese Dissertation soll nun diese Basistheorie genauer begründen und weiter entwickeln. Die von Thurston stammende Hauptidee dazu beruht auf folgender Beobachtung: Ein solcher hyperbolischer Atlas, wie er der Verklebung von idealen Tetraedern entspricht, induziert in natürlicher Art einen zweidimensionalen Ähnlichkeitsatlas, der aber noch die volle Information der gesamten dreidimensionalen Verklebung trägt. Von daher können also durch die Kenntnis der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Ähnlichkeitsstruktur auch Rückschlüsse auf das gezogen werden, was bei Verklebung von in den hyperbolischen Raum H^n eingebetteten idealen Tetraedern in der Umgebung einer solchen unendlich fernen Ecke passieren kann und passiert.

0.2 : Beispiel für das Auftreten eines zweidimensionalen Ähnlichkeitsatlas, d.h. eines Atlas, dessen sämtliche Übersetzungsabbildungen in jeder Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereichs Einschränkung einer Abbildung aus $\text{Aut}(C) := \{z \mapsto a \cdot z + b \mid a \in C^*, b \in C\}$ sind.

Bevor wir damit beginnen, die Theorie der Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten zu entwickeln, möchten wir noch kurz verdeutlichen, wieso in natürlicher Weise Ähnlichkeitsstrukturen entstehen, wenn hyperbolische Mannigfaltigkeiten durch Verkleben idealer Tetraeder erzeugt werden. Eine solche Ansammlung zu verklebender Tetraeder ist in Fig.a gezeichnet. Wir vereinbaren für diesen Absatz übrigens, daß alle Bezeichnungen, die wir bei der Beschreibung von Fig.a noch einführen werden, sofern wir sie ohne umgebende eckige Klammern gebrauchen, sich auf die Einbettung der Figur in den hyperbolischen Raum H^n beziehen (also so, wie in Fig.a gezeichnet), während wir durch das Setzen von eckigen Klammern andeuten, daß wir die Einbettung der Objekte in die hyperbolische Mannigfaltigkeit meinen, die durch Verklebung des in Fig.a ausschnittsweise Gezeichneten entsteht.

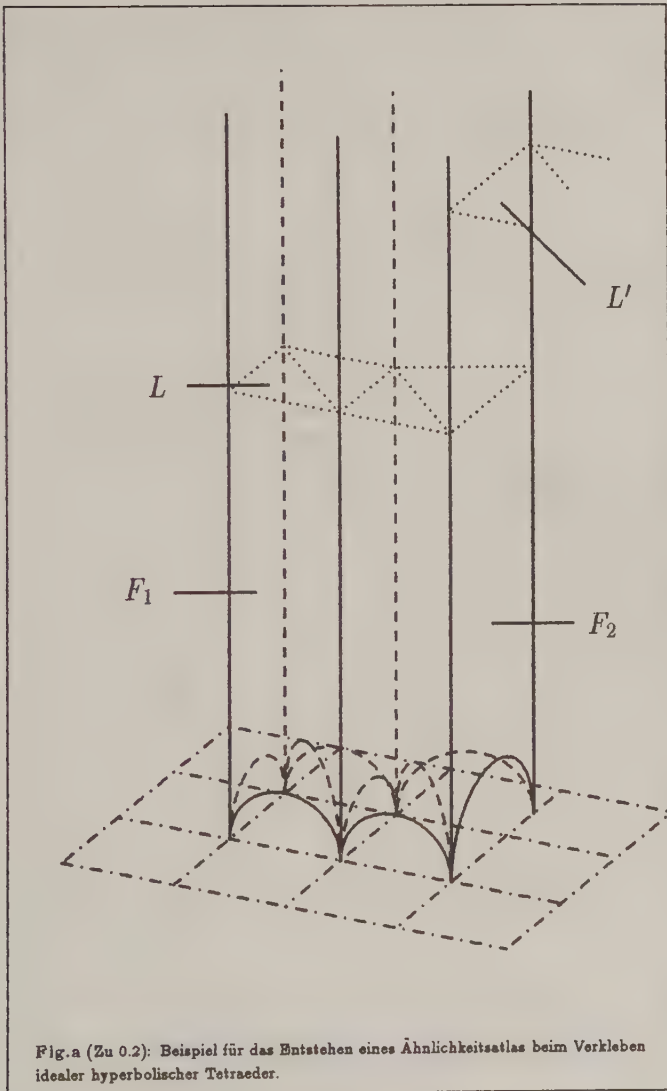


Fig.a versteht sich als Darstellung einer Ansammlung von Tetraedern, gezeichnet im Modell des Poincaréschen Halbraums für den dreidimensionalen hyperbolischen Raum H^3 . Dieses Modell der hyperbolischen Geometrie wird bereits dadurch vollständig definiert, daß man auf dem Halbraum $\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}, z > 0\} \subset \mathbb{R}^3$ (diesem

Halbraum entspricht derjenige Raumbereich aus Fig.a, der über der durch Gitterlinien im Strich-Punkt-Muster angedeuteten Ebene liegt) das "hyperbolische Skalarprodukt" $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ mit Hilfe des üblichen euklidischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ zwischen zwei Tangentialvektoren v und w mit Fußpunkt (x, y, z) wie folgt definiert: $\langle v, w \rangle_h := \frac{1}{z^2} \langle v, w \rangle$. Mit dieser Definition ergibt sich, daß sich die hyperbolische Länge $\ell_h(w)$ eines Weges $w : I \rightarrow H^3$ wie folgt errechnet: $\ell_h(w) = \int_0^1 \frac{\|w'(t)\|}{w_z(t)} dt$, wobei $\|\cdot\|$ die übliche euklidische Norm bezeichnet.

Wir haben in Fig.a Tetraeder dargestellt, die den ausgezeichneten unendlich fernen Punkt (P_∞ genannt) des Poincaréschen Halbraummodells, d.h. den einzigen Punkt der unendlich fernen Sphäre des H^3 , der in diesem Modell nicht auf dem Rand des Halbraums dargestellt ist, gemeinsam haben. Solche idealen Tetraeder bestehen (euklidisch gesehen) aus dem Durchschnitt des Raumbereichs, der über einer Kugelfläche mit Mittelpunkt im Rand des Halbraums liegt, mit demjenigen Raumbereich, der über einem Dreieck liegt, das entsteht, wenn man drei Punkte, in denen die Kugelfläche den Rand des Halbraums schneidet, miteinander verbindet. Euklidisch gesehen werden diese idealen Tetraeder von unten daher durch ein Segment einer Kugelfläche begrenzt, während die übrigen Begrenzungsflächen auch euklidisch gesehen Ebenen sind, und zwar solche, die senkrecht zum Rand des Halbraums stehen. Fig.a zeigt nun eine Ansammlung von solchen Tetraedern. Neben den bereits beschriebenen Grenzflächen der Tetraeder, haben wir dabei noch die Fläche L eingezeichnet. Damit hat es folgende Bewandnis:

Sei P_∞ derjenige unendlich ferne Punkt unserer Tetraeder-Verklebung, der hier untersucht werden soll. Das Büschel derjenigen Geraden, denen P_∞ gemeinsam ist, erscheint in Fig.a als Menge all derjenigen (euklidischen) Geraden, die innerhalb der Tetraeder parallel zur z -Achse verlaufen. L ist dann als Vetreterin einer der Flächen gezeichnet, die (auch im Sinne der hyperbolischen Geometrie) stets senkrecht zu jenen Geraden stehen. Die in den H^3 eingebetteten Flächen mit dieser Eigenschaft, z.B. $L_{z_0} := \{x, y, z_0 \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, heißen "(2-dimensionale) Horosphären". Aus den Formeln für die Weglängen ergibt sich $z_0 \cdot \ell_h(w) = \ell(w)$ für alle innerhalb von L_{z_0} verlaufenden Wege, d.h. die hyperbolische Weglänge ℓ_h ist proportional zur euklidischen Weglänge ℓ des umgebenden $\mathbb{R}^3$. Von daher sieht man, daß die hyperbolische Geometrie auf ihren Horosphären stets eine euklidische Geometrie induziert. Allerdings so, daß die Abbildung $L_{z_1} \rightarrow L_{z_2}$, die durch Projektion längs des zu P_∞ gehörenden Geradenbüschels definiert wird, keine Isometrie ist, sondern eine Ähnlichkeitsabbildung mit Streckfaktor $\frac{z_1}{z_2}$. Indem man also bei einer solchen Klebevorschrift für eine hyperbolische Dreimannigfaltigkeit aus idealen Tetraedern zu einer unendlich fernen Ecke $[P_\infty]$ die Menge aller zweidimensionalen Zellen betrachtet, die auf den Horosphären zu $[P_\infty]$ liegen, und sie verklebt mittels der Projektion längs des Geradenbüschels durch $[P_\infty]$, erhält man einen Ähnlichkeitsatlas für eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Es ist möglich, von dieser zweidimensionalen Ähnlichkeitsstruktur wieder zurückzuschließen auf die dreidimensionale hyperbolische Struktur. Dies hier darzulegen, würde jedoch zu weit führen. Wir möchten aber noch verdeutlichen, daß man hoffen darf, daß bei dieser Projektion kein Informationsverlust eintritt. Soll in der Fig.a die rechte

Fläche F_1 und die linke Fläche F_2 identifiziert werden, so ist die hyperbolische Bewegung, die F_1 auf F_2 abbildet, euklidisch gesehen eine Ähnlichkeitsabbildung; F_1 und F_2 erscheinen ja in diesem Modell euklidisch überhaupt nicht gleich groß. L' stellt dann in der Fig. a das Bild einer Umgebung von L an der Fläche F_1 unter der hyperbolischen Bewegung dar, die man braucht, um F_1 mit F_2 zu identifizieren. Da diese Bewegung das Flächenstück auf eine andere z -Koordinate hebt, hat ein Ähnlichkeitsatlas von $[L]$ an dieser Stelle eine Identifikationsabbildung mit einem echten Streckfaktor. Damit enthält diese Klebeabbildung für das zweidimensionale Gebilde $[L]$ gerade die volle Information der dreidimensionalen hyperbolischen Bewegung; die bei Projektion auf eine Fläche mit konstanter z -Koordinate zunächst als verloren erscheinende Information über das Verhalten der Identifikationsabbildung bezüglich der z -Koordinate ist in diesem Fall nicht verloren, sondern ist als Streckfaktor auch in dem zweidimensionalen Atlas von $[L]$ vorhanden.

Von daher ist ein Verständnis zweidimensionaler Ähnlichkeitsstrukturen, denen sich diese Dissertation im folgenden ausschließlich widmet, hilfreich bei der Behandlung der eben beschriebenen dreidimensionalen hyperbolischen Strukturen.

0.3 Über diese Ergebnisse dieser Arbeit: Wir werden zunächst Mannigfaltigkeiten mit Ähnlichkeitsstruktur als Sonderfall einer etwas allgemeineren Begriffsbildung (A.1.9/A.1.10) einführen, auf Mannigfaltigkeiten durch die Auszeichnung bestimmter Atlanten all das, was invariant gegen Kartenwechsel ist, als Struktur auf der Mannigfaltigkeit zu betrachten (vgl. A.3.2). In Fall von "Ähnlichkeitsstrukturen" entsteht so eine Geometrie, die zwar lokal euklidisch ist, bei der allerdings die euklidische Länge nur eindeutig bis auf einen skalaren Faktor definiert ist. Von daher sind auf Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten zwar die Begriffe "Gerade", "Winkel" und "Längenverhältnis" definiert, nicht aber absolute Längen (vgl. A.3.5(i)-A.3.5(v)). Nachdem sich rasch ergibt, daß alle zweidimensionalen geschlossenen orientierten Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten Tori sind (A.4.1), werden wir Thurston's Beweis-skizzen folgend ihre Klassifikation durchführen. Dabei erweist es sich als sinnvoll, für Mannigfaltigkeiten M mit Ähnlichkeitsstruktur folgende Unterscheidung einzuführen.

1. Fall: Jeder Versuch, die lokal in einer Koordinatenumgebung stets definierbare euklidische Metrik verträglich zur Ähnlichkeitsgeometrie auf M fortzusetzen, scheitert. Nur in dem Fall nennen wir M einen "echten Ähnlichkeitstorus" (vgl. A.2.7/D.1.10/A.3.8/B.2.3/B.2.4(i)/D.5.3).
2. Fall: M ist verträglich zur Ähnlichkeitsgeometrie metrisierbar. Dann bezeichnen wir M als "euklidischen Ähnlichkeitstorus" und deuten damit an, daß die Ähnlichkeitsgeometrie von M als von einer euklidischen Metrik induziert aufgefaßt werden kann, wobei diese Metrik durch die Ähnlichkeitsgeometrie nur eindeutig bis auf eine skalare Vielfachheit erklärt ist (vgl. A.2.4/D.1.10/A.3.5(vi)).

Im euklidischen Fall erweist sich $\mathbb{C}$ als universelle Überlagerung der Tori, im echten die unendlichblättrige Überlagerung der gelochten Ebene $\mathbb{C}^*$ (genannt $\tilde{\mathbb{C}}^*$, vgl. A.2.8), deren Geometrie durch die Überlagerungsprojektion induziert wird (A.2.17(v)/D.5.3). Beide Räume sind zwar homöomorph (sogar konform äquivalent, vgl. A.2.9), haben aber definitiv verschiedene Ähnlichkeitsstruktur (A.3.7). All diese Mannigfaltigkeiten

erscheinen flach, da sie ja lokal wie Gebiete der euklidischen Ebene metrisierbar sind; vollständig dagegen erscheinen nur die vom euklidischen Typ. Bei den echten Ähnlichkeitstori nämlich entstehen stets Geraden, die nicht beliebig verlängerbar sind (A.3.7(ii)/D.5.3/A.2.17(v), vgl. auch C.2.10). Aufgrund der in der Ähnlichkeitsgeometrie erklärten Längenverhältnisse ist letztere Aussage möglich, auch wenn die Ähnlichkeitsgeometrie echter Ähnlichkeitstori durch keinen affinen Zusammenhang zu beschreiben ist (A.3.9). Die echten Ähnlichkeitstori sind jedoch gerade für die in den beiden letzteren Punkten 0.1 und 0.2 beschriebene Anwendung interessant. Aufbauend auf der Klassifikation werden wir dann zeigen, daß sich die Struktur eines Ähnlichkeitstorus durch einen Fundamentalbereich darstellen läßt (B.5.7/D.5.3); d.h. in jedem Fall existiert eine in die Ebene eingebettete und von daher mit einer Geometrie versehene Zelle, deren Rand in vier Segmente unterteilt ist, sodaß bei Identifikation der gegenüberliegenden Segmente durch Ähnlichkeitsabbildungen der Ähnlichkeitstorus mit der auf ihm definierten Ähnlichkeitsgeometrie dargestellt wird. Wir werden ferner zeigen, daß alle Ähnlichkeitsstrukturen, die sich bei der vorausgehenden Klassifikation als definitiv verschieden erwiesen haben, prinzipielle Unterschiede in ihrer Ähnlichkeitsgeometrie aufweisen (B.4.6/D.5.3/E.2.0(3.)). Außerdem werden wir das von Thurston vorgeschlagene Konzept der Holonomie, das erst durch Unterscheidung der euklidischen und echten Ähnlichkeitstori und durch zusätzliche Übersetzungstricks die Klassifikation der Ähnlichkeitstori ermöglicht hat, so weit verallgemeinern, daß wir alle Ähnlichkeitsstrukturen auf Tori durch nach einem allgemeinen Konzept zu definierende Strukturinvarianten, nämlich den $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen unterscheiden können (D.6.11). Schließlich werden wir im letzten Abschnitt dieser Arbeit das Ergebnis unserer Klassifikation mit den verschiedenen Strukturen, die Tori als riemannsche Flächen aufweisen können, vergleichen; dabei wird sich zeigen, daß die Klassifikation nach den verschiedenen Ähnlichkeitsgeometrien eine feinere Klassifikation ist.

0.4 Beweisskizze des Klassifikationssatzes:

Das wohl wichtigste Hilfsmittel bei der Klassifikation der geschlossenen Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur entsteht bei dem Versuch, eine Koordinatenabbildung soweit als möglich fortzusetzen. Diese Fortsetzung ist grundsätzlich möglich, da auch jede Ähnlichkeitsabbildung, die nur in einer offenen Umgebung bekannt ist, eindeutig fortgesetzt werden kann. Man kann zeigen, daß diese Fortsetzung bei einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten immer möglich ist; bei nicht einfach zusammenhängenden kann jedoch auf die universelle Überlagerung ausgewichen werden. Im allgemeinen Fall erhält man durch diesen Ansatz also eine "globale Karte", die die universelle Überlagerung lokal homöomorph in die Grundmannigfaltigkeit hinein abbildet (C.2.1/C.2.2). Unglücklicherweise können wir im allgemeinen wirklich nicht mehr von dieser globalen Karte erwarten, als daß sie ein lokaler Homöomorphismus ist. Wir können nämlich a priori nicht ausschließen, daß

- (i) die globale Karte nicht surjektiv ist (C.2.10(ii)), oder daß
- (ii) es Punkte in der Grundmannigfaltigkeit gibt, die nicht regulär überlagert werden, obwohl ihr vollständiges Urbild natürlich eine diskrete Menge ist und jeder ihrer Punkte durch einen Homöomorphiebereich umgeben werden kann; regulär überlagert

würde unser Punkt in der Grundmannigfaltigkeit jedoch erst, wenn der Schnitt über alle Einbettungen dieser Homöomorphiebereiche immer noch offen ist. Doch dies können wir nicht unterstellen, solange wir von unserer globalen Karte Φ nicht mehr wissen, als daß sie ein lokaler Homöomorphismus ist.

Auch wenn Φ nur ein lokaler Homöomorphismus ist, so übersetzt es doch das Operieren der Deckbewegungsgruppe der universellen Überlagerung $\widetilde{M}$ in das Operieren einer Untergruppe der Strukturgruppe auf der Grundmannigfaltigkeit X , in unserem Fall also in eine Untergruppe der Ähnlichkeitstransformationen. Diese Untergruppe heißt "*Holonomiegruppe*" (B.1.14/C.2.3(iii)). Die Möglichkeiten, aus dem Verhalten der Holonomiegruppe auf die zu untersuchende Mannigfaltigkeit M zurückzuschließen, sind freilich so lange gering, so lange wir von Φ nur unterstellen dürfen, daß es ein lokaler Homöomorphismus ist und nicht weiter im Griff haben, wie $\widetilde{M}$ über X liegt. Wir müssen auch durchaus damit rechnen, daß die Holonomiegruppe kein injektives Bild der Deckbewegungsgruppe ist (B.1.25(i)) oder daß sie nicht diskontinuierlich operiert (B.1.25(ii)). Eine Klassifikation der Ähnlichkeitstori ist also allein durch eine Betrachtung der möglichen Holonomiegruppen nicht zu erreichen; vielmehr sind gezielte Überlegungen notwendig, um zuerst das Verhalten der globalen Karten im Falle zweidimensionaler Ähnlichkeitsstrukturen genauer beschreiben zu können, als dies im Zuge der allgemeinen Theorie möglich ist.

Zunächst einmal ergibt sich mit Hilfe der Theorie der Eulercharakteristik als Konsequenz aus der Ähnlichkeitsgeometrie, daß alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit Ähnlichkeitsstruktur Tori sein müssen (A.4.1/A.4.2). Dies impliziert, daß ihre Holonomiegruppen als homomorphe Bilder der Fundamentalgruppen abelsch sind und höchstens zwei Erzeugende haben. Dadurch engt sich der Kreis der möglichen Holonomiegruppen der Ähnlichkeitstori auf diejenigen Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ ein, die entweder nur aus Translationen bestehen, oder nur aus Drehstreckungen (einschließlich reiner Drehungen und reiner Streckungen) mit demselben Fixpunkt (D.2.5/D.3.3). Da sich mit Hilfe der globalen Karte stets ein Atlas konstruieren läßt, bei dem als Übersetzungsabbildungen nur Abbildungen aus der Holonomiegruppe entstehen (C.2.4(ii)), liegt in dem Fall, da die Holonomiegruppen reine Translationsgruppen sind, im Sinne von 0.3(2.Fall) ein euklidischer Ähnlichkeitstorus vor (D.2.4), d.h. ein Raum der ohne weiteres metrisierbar wäre. Unter Zuhilfenahme einer solchen gegen Kartenwechsel invarianten Metrik sind für die globale Karten kompakter (oder zumindest metrisch vollständiger Mannigfaltigkeiten) weitergehende Aussagen möglich als im allgemeinen Fall. Die globalen Karten sind dann stets Überlagerungen (C.3.1/C.3.2, C.2.6) und dabei bei einer einfach zusammenhängenden Grundmannigfaltigkeit wie $\mathbb{C}$ sogar Homöomorphismen. Die globale Karte gestattet damit also, die universelle Überlagerung $\widetilde{M}$ mit $\mathbb{C}$ zu identifizieren und dabei auch die Deckbewegungsgruppe mit der Holonomiegruppe. Die Mannigfaltigkeit ist folglich in dem Fall doch als Orbitraum der Grundmannigfaltigkeit nach dem Operieren der Holonomiegruppe darzustellen (C.2.8/C.2.9). In dem Fall kann die Klassifikation der Ähnlichkeitstori durch eine recht einfache und im übrigen im Zuge der Theorie der riemannschen Flächen bereits durchgeführte Diskussion des Operierens der Translationsgruppen in der Ebene abgeschlossen werden.

Auch im Fall, da die Holonomiegruppe nur aus Drehstreckungen zu ein- und demselben Punkt besteht, muß man sich der Zuhilfenahme von Metriken bedienen, um das Verhalten der globalen Karten abschätzen zu können. Da die Holonomiegruppen dann nicht nur aus Isometrien (im Bezug auf die übliche euklidische Metrik) bestehen können (D.2.4), führen wir durch Verzerrung der üblichen euklidischen Weglänge um den Kehrwert des Abstands zum Streckzentrum eine riemannsche Metrik auf C ein, sodaß die Holonomiegruppen dann invariant gegenüber der neuen Metrik operieren (D.4.5–D.4.7). Allerdings setzt diese neue Metrik voraus, daß wir das Streckzentrum der Holonomie aus der Grundmannigfaltigkeit entfernen, da die neue Metrik nur im Komplement jenes Punktes wohldefiniert ist. M sei dann also im folgenden entweder unser ursprünglich gegebener Torus oder der um die Urbilder des Streckzentrums der globalen Karte gelochte Torus, den wir zunächst betrachten müssen, eh wir durch einen Widerspruch (D.4.8) ausschließen können, daß das Streckzentrum im Bild der globalen Karte liegt. M ist damit zwar nicht mehr unbedingt kompakt, aber im Sinne der neuen Metrik auf jeden Fall metrisch vollständig (D.4.7(iii)), sodaß mit den im ersten Fall bereits erwähnten Ergebnissen die globale Karte eine Überlagerung sein muß. Da der Wertebereich dieser Überlagerung ja nunmehr die um das Streckzentrum der Holonomie gelochte Ebene ist, tritt als universelle Überlagerung von M der bereits in 0.3 beschriebene Raum $\tilde{C}^*$ auf. $\tilde{C}^*$ läßt wesentlich weniger Ähnlichkeitsabbildungen zu als die übliche Ebene C , nämlich nur die Fortsetzungen der Drehstreckungen um seinen Windungspunkt. $\tilde{C}^*$ kann auch als diejenige riemannsche Fläche aufgefaßt werden kann, auf die sich die Logarithmusfunktion fortsetzen läßt (A.2.9). Bilden wir $\tilde{C}^*$ mit Hilfe dieses fortgesetzten Logarithmus ("Log") auf die normale Ebene C ab (was freilich nicht verträglich zur Ähnlichkeitsgeometrie ist), so gehen die Ähnlichkeitsabbildungen von $\tilde{C}^*$ gerade in Translationen über (A.2.13(2)). Von daher führt auch diese Klassifikationsaufgabe letztlich auf dieselbe Diskussion wie bei den euklidischen Ähnlichkeitstori (D.5.1), allerdings mit etwas anderem Ergebnis, da Ähnlichkeitsabbildungen, die keine Translationen sind, nicht von $\tilde{C}^*$ -Ähnlichkeitsabbildungen herühren. Zuvor muß freilich noch ausgeschlossen werden, daß das Bild der globalen Karte unseres echten Ähnlichkeitstorus das Streckzentrum der Holonomie enthalten könnte, d.h. daß M in den Überlegungen von eben nur ein gelochter Torus und $\tilde{M}$ nur die Überlagerung eines gelochten Torus gewesen wäre. Bezeichnen wir dann den noch ungelochten Torus mit $\bar{M}$, so können wir mit Hilfe der Geometrieverträglichkeit der globalen Karten aus dem Umstand, daß die globale Karte von M eine Überlagerung ist, folgern, daß auch die globale Karte von $\bar{M}$ zu einer Überlagerung wird, wenn man das Streckzentrum der Holonomie aus der Ebene und die in jedem Blatt von $\tilde{M}$ vorhandenen Urbilder davon aus $\tilde{M}$ entfernt. Da jedoch nach der Überlagerungstheorie die mehrfach gelochte Ebene keine Überlagerung der einfach gelochten sein kann, ist dieser Fall ausgeschlossen (D.4.8).

0.5 Über den Aufbau dieser Arbeit:

Nachdem wir §A.1 zunächst den Begriff der strukturierten Mannigfaltigkeiten (der den der Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten) umfaßt, einführen, geben wir in §A.2 eine Reihe

von Beispielen; unter anderem stellen wir dabei auch Schemata zur Konstruktion zweidimensionaler Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur vor ("Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung", A.2.4/A.2.15), die allgemein genug sind, alle wesentlich verschiedenen auf geschlossenen Flächen möglichen $(\text{Aut}(C), C)$ -Strukturen erfassen, was freilich zu dem Zeitpunkt noch nicht klar ist. Daß alle geschlossenen Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur Tori sind, kann, weil es nur eine direkt auf der Geometrie (und nicht auf Klassifikationssaussagen) beruhende Erkenntnis ist, nach der Definition der induzierten Geometrie strukturierter Mannigfaltigkeiten in §A.3 bereits gegen Ende des Abschnitts A (§A.4/§A.5) gezeigt werden.

Im Abschnitt B gilt es dann, eine Reihe von Aussagen für und über die in Standarddarstellung gegebenen Tori abzuleiten. Dabei führen wir zunächst algebraische und geometrische Invarianten ein (§B.1: Holonomie; §B.2: Vergrößerungsfaktoren, §B.3: Umlaufwinkel), unterscheiden damit alle in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori (B.1.21/B.3.23), zeigen wesentliche Unterschiede in den Geometrien aller nicht-strukturgleichen in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori auf (§B.4) und zeigen, daß alle Ähnlichkeitstori auch durch Fundamentalbereiche gegeben werden können (§B.5). Dies geschieht vor allem deshalb bereits an der Stelle, um den Leser nicht gleich zu Beginn dieser Arbeit mit den abstrakten Vorstellungen zu konfrontieren, die nun einmal nötig sind, um aus den in 0.4 angedeuteten Zusammenhängen schlüssige Beweisargumente zu machen und ihm zuerst eine gewisse Anschauung von Mannigfaltigkeiten mit Ähnlichkeitsstruktur zu vermitteln. Mit den in den Abschnitten C und D abzuleitenden Aussagen gelten die Ergebnisse von Abschnitt B damit sogar für alle geschlossenen orientierten Flächen mit Ähnlichkeitstruktur (D.5.3), auch wenn sie in Abschnitt B zunächst nur für die in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori behauptet und bewiesen werden.

In den Abschnitten C und D wird dann die in 0.4 skizzierte Klassifikation der Ähnlichkeitstori durchgeführt, die ja, wie bereits in 0.4 deutlich geworden sein sollte, einerseits auf der Benutzung von Methoden und Ergebnissen beruht, die man zur Verfügung hat, wenn man Metriken ins Spiel bringt, und andererseits auf gewissen Ergebnissen über die $(\text{Aut}(C), C)$ -Mannigfaltigkeiten, die es möglich machen, diese Metriken einzuführen. Wir beschreiben zunächst den Begriffsrahmen, in dem diese Überlegungen präzisiert werden sollen.

▷ Wir führen in dieser Arbeit nicht nur den Typ der $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten ein, sondern von Anfang auch den allgemeinen Begriff der (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten, bei dem " G " und " X " noch nicht näher spezifiziert ist (A.1.9). Insbesondere betrachten wir in dem Rahmen natürlich auch diejenigen Typen (G, X) -strukturierter Mannigfaltigkeiten, die im Zuge der Rückführung der Klassifikation der $(\text{Aut}(C), C)$ -Mannigfaltigkeiten auf den metrischen Fall auftreten. Auch wenn wir erst im Abschnitt C damit beginnen, neben $(\text{Aut}(C), C)$ andere Strukturtypen genauer zu betrachten, werden wir von Anfang an diejenigen Definitionen und Lemmas, die auch jenseits des Strukturtyps $(\text{Aut}(C), C)$ gelten, entsprechend allgemeiner formulieren.

- ▷ Durch kanonische Umdefinitionen von Atlanten, durch die weder die Punktmenge, noch die Topologie, aus der eine Mannigfaltigkeit besteht, verändert werden, ist es dann mitunter möglich, eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit in eine (H, Y) -strukturierte zu verwandeln. Solche Manipulationen an Atlanten definieren uns kanonische Funktoren zwischen den verschiedenen Strukturtypen (D.1.3).
- ▷ Diese kanonischen Funktoren definieren induzierte Abbildungen auf der Menge aller Klassen strukturgleicher (in dieser Arbeit nur: geschlossener) Mannigfaltigkeiten, die wir als "Strukturtransformationen" bezeichnen (D.1.3(iv)).

Die Möglichkeit, die in 0.4 erwähnten Ergebnisse, die "beim Vorliegen von Metriken" gelten, als Ergebnisse für (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeiten, bei denen G eine Gruppe von Isometrien ist, zu formulieren, und die Möglichkeit, die Strukturtransformationen daraufhin zu untersuchen, inwieweit sie injektiv und surjektiv sind, geben uns den allgemeinen Begriffsrahmen, um unsere Überlegungen zur Klassifikation der geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(C), C)$ -Struktur mit der nötigen Präzision zu beschreiben und in Einzelschritte aufgliedern zu können.

In Abschnitt C befassen wir uns mit denjenigen Typen wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten, deren Strukturgruppe aus Isometrien besteht und leiten dabei Hilfsmittel aus deren Theorie ab, die bei der in 0.4 skizzierten Klassifikation aller Ähnlichkeitstori eine Rolle spielen. Konkret zeigen wir im §C.1 zunächst, wie in dieser Situation auf (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten eine Metrik induziert wird, konstruieren im §C.2 die globale Karte und beweisen in §C.3 die Kriterien, unter denen die globale Karte eine Überlagerung wird.

Im Abschnitt D werden dann die in 0.4 beschriebenen Überlegungen zur Klassifikation der Ähnlichkeitstori in Angriff genommen und in §D.1 zunächst die Kategorien strukturierter Mannigfaltigkeiten und die zugehörigen Kategorietransformationen eingeführt. Die geschlossenen orientierten Flächen mit euklidischer Ähnlichkeitsstruktur werden dann in §D.2 klassifiziert; die Behandlung der echten Ähnlichkeitstori, d.h. der Nachweis, daß diejenigen Bestandteile, deren Komposition eine geometrieverändernde Strukturtransformation zwischen den Flächen mit echter Ähnlichkeitsstruktur und den Flächen mit Translationsstruktur ergibt, bijektiv sind, erstreckt sich dann über §D.3 und §D.4. Der §D.5 dient dann der Zusammenfassung und dem Auflisten einiger elementaren Folgerungen der Klassifikationsüberlegungen der vorausgehenden Paragraphen. Im §D.6 schließlich werden wir dann die $\text{Aut}^{\sim}(C)$ -Holonomie konstruieren, d.h. nachweisen, daß es einheitliche (d.h. sowohl für echte wie auch für euklidische Ähnlichkeitstori gültige) Vorschriften gibt, die üblichen, in $\text{Aut}(C)$ definierten Holonomiegruppen in die universelle Überlagerung, genannt $\text{Aut}^{\sim}(C)$ zu liften und somit eine nach einem einheitlichen Konzept definierte algebraische Strukturinvariante zu erhalten, die alle geschlossenen Flächen mit $(\text{Aut}(C), C)$ -Struktur klassifiziert.

In Abschnitt E schließlich erinnern wir an die verschiedenen Strukturen, die ein Torus als riemannsche Fläche annehmen kann und übertragen einige Ergebnisse aus der Untersuchung der Geometrie jener Objekte auf die euklidischen Ähnlichkeitstori (§E.2). Wir legen ferner dar, wie es kommt, daß, obwohl jeder Ähnlichkeitstorus ja auch als riemannsche Fläche aufgefaßt werden kann, die echten Ähnlichkeitstori Phänomene in

ihrer Geometrie aufweisen, die man von der Untersuchung der riemannschen Flächen her nicht kennt (E.1.2/E.1.9). Abschließend (§E.3) geben wir eine Menge von Zahlenpaaren an, die sich den Klassen strukturgleicher geschlossener Flächen mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur bijektiv zuordnen läßt. Der erste Bestandteil dieser Zahlenpaare sind gerade die Torusmoduln (E.1.3), durch die die gröbere Klassifikation der verschiedenen Strukturen riemannscher Flächen, die auf einem Torus entstehen können, beschrieben wird.

Abschnitt A : Begriffsbildungen, Standardbeispiele und Geometrie der strukturierten Mannigfaltigkeiten

§1: Definition der (wohl)strukturierten Mannigfaltigkeit

In diesem Paragraphen gilt es, den Begriff der " $(\wp, X)$ -strukturierten Mannigfaltigkeit und der " (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeit" einzuführen und zu dem Zweck zuvor klarzustellen, was dabei die "Grundmannigfaltigkeit X ", die "Pseudogruppe $\wp$ " und die "Strukturgruppe G " sein müssen bzw. dürfen.

1.1 Begriff: Unter einer "Mannigfaltigkeit" verstehen wir in dieser Arbeit einen topologischen Raum, der lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$, hausdorffsch, zusammenhängend und orientiert ist sowie eine abzählbare Basis hat. Man bemerke, daß damit die in dieser Arbeit betrachteten Mannigfaltigkeiten niemals Randpunkte haben. Solange wir dem Begriff "Mannigfaltigkeit" keine weiteren Attribute hinzufügen, betrachten wir die entsprechenden Räume stets als Objekt der Kategorie TOP.

1.2 Definition: Sei X eine Mannigfaltigkeit. Dann bezeichnen wir eine Menge von Paaren

$$\wp = \{(U_i, f_i) \mid i \in I\}$$

als "Pseudogruppe, die auf X operiert", falls $\wp$ den folgenden Axiomen genügt:

- (i) Die Familie $\{U_i \mid i \in I\}$ ist eine offene Überdeckung von X .
- (ii) Jedes $f_i : U_i \rightarrow X$ ist ein lokaler Homöomorphismus.
- (iii) Sei U eine offene Teilmenge von U_i . Dann ist $(U, f_i|_U) \in \wp$.
- (iv) Sei $f_i(U_i) \subset U_j$, so ist $(U_i, f_j \circ f_i) \in \wp$.
- (v) Ist f_i injektiv, so ist $(f_i(U_i), f_i^{-1}) \in \wp$.
- (vi) Sei $J \subset I$, sodaß $f_{j_1}(x) = f_{j_2}(x)$ ist, woimmer ein $x \in X$ in $U_{j_1} \cap U_{j_2}$ für $j_1, j_2 \in J$ liegt. Dann ist $(\bigcup_{j \in J} (U_j), f) \in \wp$, wobei f definiert wird durch $f|_{U_j} := f_j$ für alle $j \in J$.

1.3 Bemerkung: Sei $\wp$ eine Pseudogruppe, die auf X operiert und $U \subset X$ offen. Dann ist $(U, \text{Id}_U) \in \wp$.

Beweis: Sei $P \in X$. Nach 1.2(i)/1.2(ii) existiert $(V', f) \in \wp$, sodaß $P \in V'$ und f ein lokaler Homöomorphismus ist. Nach 1.2(iii) können wir die Umgebung V' zur offenen Umgebung $V \ni P$ verkleinern, sodaß auch $(V, f|_V)$ in $\wp$ liegt und $f|_V$ dann ein injektiver lokaler Homöomorphismus ist. Aus 1.2(v) und 1.2(iv) folgt, daß auch $(V, f^{-1} \circ f|_V) = (V, \text{Id}_V) \in \wp$ gilt. Da auf die Weise gezeigt ist, daß zu jedem Punkt $P \in X$ eine offene Umgebung V mit $(V, \text{Id}_V) \in \wp$ existiert, folgt 1.3 aus 1.2(iii) und

1.2(vi) für alle $U \overset{\text{offen}}{\subset} X$. □

1.4 Definition und Beispiel: Sei G eine Gruppe, die auf einem Raum X operiert. Gilt dann für je zwei Elemente $g_1, g_2 \in G$ und jede offene Menge $U \subset X$ die Implikation

$$g_1|_U = g_2|_U \implies g_1 = g_2,$$

so heißt G "quasianalytisch".

- (i) Gruppen von analytischen Abbildungen sind quasianalytisch.
- (ii) Die Gruppe der Linksoperationen einer Lie-Gruppe auf sich operiert quasianalytisch, hier impliziert ja $\phi_1(x) = y \cdot \phi_2(x)$, daß ϕ_1 und ϕ_2 nur die Linksoperation mit $y \cdot x^{-1}$ sein können.

1.5 Bemerkung: Sei G eine auf X quasianalytisch operierende Gruppe. Dann bildet

$$\wp_G := \{(U, \phi) \mid U \overset{\text{offen}}{\subset} X, \text{ für alle Zusammenhangskomponenten } V \subset U \text{ existiert } g \in G, \text{ soda\ss } \phi_V = g_V\}$$

eine Menge von Karten, die die Axiome 1.2(i)–1.2(vi) erfüllt und von daher eine Pseudogruppe bildet.

1.6 Definition: $\{U_i \mid i \in I\}$ bilde eine offene Überdeckung einer Mannigfaltigkeit M . Für jedes $i \in I$ sei eine topologische Einbettung $\phi_i : U_i \rightarrow X$ erklärt, wobei $\text{Bild}(\phi)$ offen in X ist. X ist dabei für alle $i \in I$ dieselbe Grundmannigfaltigkeit. Dann bilden die "Karten" genannten Paare aus "Koordinatenumgebungen" U_i und die "Koordinatenabbildungen" ϕ_i einen "Atlas"

$$(1) \quad \mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}.$$

Gilt dann für alle (i, j) -Paare mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, daß die durch Verkettung von ϕ_i^{-1} und ϕ_j definierte "Übersetzungsabbildung"

$$(2) \quad \gamma_{i,j} : \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$$

- (i) in einer auf X operierenden Pseudogruppe $\wp$ liegt, bzw.
- (ii) in der nach 1.5 definierten Pseudogruppe $\wp_G$ liegt, d.h. auf jeder Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereichs Restriktion einer auf X quasianalytisch operierenden Gruppe G ist,

so bezeichnen wir $\mathcal{A}$ sogar als einen (i) $(\wp, X)$ -Atlas bzw. als einen (ii) (G, X) -Atlas.

1.7 Bemerkung: Ein $(\wp, X)$ -Atlas bzw. (G, X) -Atlas $\mathcal{A}$ heißt maximal, falls es keine nicht schon in $\mathcal{A}$ enthaltene Karte gibt, bei der die durch Schnitte mit Karten aus $\mathcal{A}$ entstehenden Übersetzungsabbildungen die Verträglichkeitsbedingung 1.6(i) bzw. 1.6(ii) erfüllen. Analog wie in der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten läßt sich mit Hilfe des Zorn'schen Lemmas unter Ausnutzung der Pseudogruppenaxiome (1.2/1.3) bzw. der Quasianalytizität (1.4) zeigen, daß sich jeder $(\wp, X)$ - bzw. (G, X) -Atlas

$\mathcal{A}$ zu einem maximalen Atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ erweitern läßt und daß dieser maximale Atlas dann dadurch eindeutig bestimmt ist, daß er genau die zu dem Atlas $\mathcal{A}$ verträglichen Karten umfaßt. Die Bezeichnung $\tilde{\mathcal{A}}$, wobei "A" ein beliebiger Ausdruck für einen Atlas ist, wird in dieser Arbeit stets benutzt, um die Vervollständigung des Atlases $\mathcal{A}$ im Sinne dieser Bemerkung zu bezeichnen; wollen wir zusätzlich betonen, innerhalb welcher Pseudogruppe $\wp$ bzw. Gruppe G die Vervollständigung vollzogen wurde, so schreiben wir " $\tilde{\mathcal{A}}^\wp$ " oder " $\tilde{\mathcal{A}}^G$ ".

1.8 Definition: Seien $(M, \mathcal{A})$ und $(M', \mathcal{A}')$ zwei Mannigfaltigkeiten mit maximalem $(\wp, X)$ - bzw. (G, X) -Atlas. Eine Abbildung $f: M \rightarrow M'$ heißt $(\wp, X)$ - bzw. (G, X) -strukturertreu, wenn für alle $P \in M$ Umgebungen $U_P \ni P$ und $V_{f(P)} \ni f(P)$ existieren, sodaß $f|_{U_P}: U_P \rightarrow V_{f(P)}$ ein Homöomorphismus ist, $(V_{f(P)}, \phi)$ eine Karte aus $\mathcal{A}'$ und $(U_P, \phi \circ (f|_{U_P}))$ eine Karte von $\mathcal{A}$ ist.

Als unmittelbare Folgerungen dieses Begriffs, insbesondere der Möglichkeit, eine strukturertreue Abbildung immer lokal umzukehren, ergeben sich folgende Eigenschaften:

- (i) Die Hintereinanderausführung strukturertreuer Abbildungen ist wieder strukturertreu.
- (ii) Ist ein Homöomorphismus strukturertreu, so auch die Umkehrabbildung dieses Homöomorphismus.
- (iii) Sind f und h strukturertreu und gilt $h \circ g = f$, so ist auch g strukturertreu.
- (iv) Sind f und g strukturertreu, g surjektiv und gilt $h \circ g = f$, so ist auch h strukturertreu.

1.9 Definition: Sei X eine Mannigfaltigkeit, aufgefaßt als Objekt einer Unterkategorie XXX der Kategorie TOP und sei

$$(1) \quad \text{Aut}_{\text{XXX}}(X) := \{f \mid f \text{ ist Bimorphismus aus } \text{mor}(\text{XXX}).\}$$

Dann bezeichnen wir:

- (i) Ein Paar $(M, \mathcal{A})$, wobei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein maximaler $(\wp, X)$ -Atlas von M ist, als " $(\wp, X)$ -strukturerte Mannigfaltigkeit", falls $\wp$ eine auf X operierende Pseudogruppe ist, die $\wp \supset \wp_{\text{Aut}_{\text{XXX}}}(X)$ genügt (vgl. 1.5).
- (ii) ein Paar $(M, \mathcal{A})$, wobei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein maximaler (G, X) -Atlas ist, als " (G, X) -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeit", falls G eine quasianalytisch auf X operierende Gruppe ist, für die $G \supset \text{Aut}_{\text{XXX}}(X)$ gilt.
- (iii) Gilt bei (ii), daß $X = H$ eine Lie-Gruppe ist und G die Gruppe der Linksoperationen von H auf sich, so bezeichnen wir die entsprechend definierten Paare $(M, \mathcal{A})$ als (H, H) -Mannigfaltigkeiten, d.h. wir verzichten bei den Bezeichnungen darauf, H und die Gruppe der Linksoperationen von H auf sich zu unterscheiden (vgl. 1.4(ii)).

Der Sinn der Forderungen " $\wp \supset \wp_{\text{Aut}_{\text{XXX}}}(X)$ " bzw. " $G \supset \text{Aut}_{\text{XXX}}(X)$ " wird durch Beispiel 2.19(Fig.e) deutlich.

1.10 Bemerkungen und weitere Begriffe:

- (i) Untersuchen wir die Klasse (G, X) -wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten, so bezeichnen wir X als "Grundmannigfaltigkeit" und G als "Strukturgruppe". Wegen

1.5/1.6 kann jede Klasse wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten als Sonderfall einer Klasse strukturierter Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden.

- (ii) Auf der Klasse der (ρ, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten (und damit auch für jede Klasse (G, X) -wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten) bildet die Existenz strukturerhaltenden Homöomorphismen eine Äquivalenzrelation; zwei strukturerhaltend homöomorphe (ρ, X) -Mannigfaltigkeiten heißen “*strukturgleich*” und gelten im Sinne der Theorie der (ρ, X) -Mannigfaltigkeiten als abstrakt nicht unterscheidbar.
- (iii) Eine Äquivalenzklasse geschlossener Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir auch als “*Strukturklasse*”. Die in dieser Dissertation zu bewältigende Klassifikationsaufgabe besteht in der Ermittlung und Beschreibung aller Strukturklassen des Typs der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten (vgl. Einl.0.2/2.2(1)).

1.11 Bemerkung zu der Rolle nicht-maximaler Atlanten:

Da nach 1.9 zur Definition von strukturierten Mannigfaltigkeiten nur maximale Atlanten benutzt werden dürfen, kommt nicht-maximalen Atlanten in dieser Arbeit folglich nur die Bedeutung von Hilfsgrößen zu: Da maximale Atlanten in den seltensten Fällen explizit beschrieben werden können, werden also in der Regel nicht-maximale Atlanten konstruiert und dann gemäß 1.7 vervollständigt. Da die Vervollständigung nach 1.7 eindeutig ist, reicht aber die Angabe eines nicht-maximalen Atlases, um (wie wir auch sagen werden) “die (ρ, X) - oder (G, X) -Struktur von M zu beschreiben”. Allerdings kann es sein, daß ein nicht-maximaler Atlas zur Beschreibung von verschiedener Typen von Strukturen auf derselben topologischen Mannigfaltigkeit M dienen kann. Sind etwa $H \subset G$ zwei auf X quasianalytisch operierende Gruppen und ist $\mathcal{A}$ ein nicht-maximaler Atlas von M , dessen sämtliche Übersetzungsabbildungen durch H -Abbildungen dargestellt werden können, so beschreibt $\mathcal{A}$ einerseits die Struktur der (H, X) -Mannigfaltigkeit $(M, \tilde{\mathcal{A}}^H)$ und andererseits die (G, X) -Struktur der Mannigfaltigkeit $(M, \tilde{\mathcal{A}}^G)$. Beachte jedoch, daß es außer in sehr ungewöhnlichen Ausnahmefällen unmöglich ist, daß ein- und dieselbe strukturierte Mannigfaltigkeit zugleich verschiedenen Typen von Strukturen zugerechnet werden kann, weil bei $H \subset G$ in aller Regel kein Atlas sowohl als (H, X) - als auch als (G, X) -Atlas maximal sein kann.

§2: Beispiele für Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur

2.1 Beispiele für Grundmannigfaltigkeiten ...

... sind etwa $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ oder S^n (letztere aufgefaßt als Einheitskugel im $\mathbb{R}^{n+1}$). Da auf all jenen Räumen Koordinaten gegeben sind, läßt sich für jeden dieser Räume eine Unterkategorie XXX von TOP derart erklären, daß Objekte von XXX nur die zu $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ bzw. S^n koordinatengleichen Räume sind und Morphismen dieser Kategorie nur die koordinatentreuen Abbildungen. Folgerung dieser Konstruktion ist, daß im Sinne 1.9(1) die Gruppen $\text{Aut}_{\text{XXX}}(X)$ nur aus der Identität bestehen und die Bedingung 1.9(ii) bzw. 1.9(i) daher in jedem Fall erfüllt ist, egal welche Strukturgruppe bzw. Pseudogruppe auf unserem X (d.h. dem $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ oder der S^n) erklärt ist.

Will man dagegen die hyperbolischen Mannigfaltigkeiten (vgl. Einl.0.2) diesem Begriff

unterordnen, so ist es durchaus empfehlenswert, die verschiedenen bekannten Modelle für den hyperbolischen Raum (z.B. das Klein'sches Modell, das Poincaré'sche Scheiben- und das Halbraummodell) alle als verschiedene Objekte der den H^n beschreibenden Kategorie XXX zuzulassen. Da es in dem Fall mehrere Möglichkeiten gibt, diese Modelle miteinander zu identifizieren, ist es von daher sinnvoll, diese Kategorie XXX so zu definieren, daß $\text{Aut}_{\text{XXX}}(H^n) \supsetneq \{\text{Id}\}$ gilt.

2.2 Liste der Typen (wohl)strukturierter Mannigfaltigkeiten, die in dieser Arbeit eine Rolle spielen

Folgende auf $\mathbb{C}$ operierende (Pseudo-)Gruppen sind dabei von uns von Interesse:

(i) Die Gruppe der orientierungserhaltend operierenden Ähnlichkeitsabbildungen

$$(1) \quad \text{Aut}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto a \cdot z + b \mid a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C}\}.$$

Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur bezeichnen wir als "*Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten*".

(ii) Die Gruppe der orientierungserhaltend operierenden euklidischen Bewegungen

$$(2) \quad \text{Iso}(\mathbb{C}) := \{z \mapsto a \cdot z + b \mid a, b \in \mathbb{C}, |a| = 1\}.$$

Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur bezeichnen wir als "*euklidische Mannigfaltigkeiten*".

(iii) Die auf $\mathbb{C}$ operierende Gruppe der Translationen entsteht als Gruppe der Linksoperationen der Lie-Gruppe $(\mathbb{C}, +)$ auf sich. Entsprechend 1.9(iii) bezeichnen wir Mannigfaltigkeiten mit einer solchen Translationsstruktur als $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeiten.

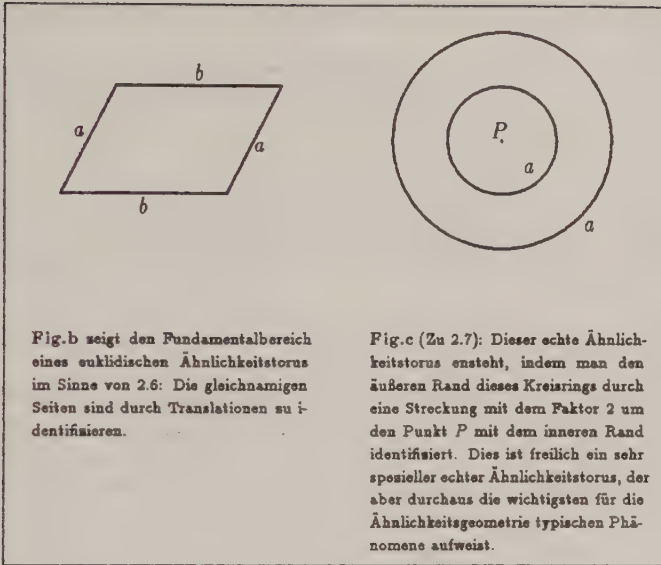
(iv) Die Gruppe der Drehstreckungen um den Nullpunkt. Diese erhalten wir als Gruppe der Linksoperationen, wenn wir $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ als Lie-Gruppe auffassen. Entsprechend 1.9(iii) reden wir von $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ -Mannigfaltigkeiten oder $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeiten, je nachdem ob der Nullpunkt nun noch zu unserer Grundmannigfaltigkeit hinzugehören soll oder nicht.

(v) C^ω bezeichne in dieser Arbeit die Pseudogruppe (vgl. 1.2) der auf offenen Umgebungen von $\mathbb{C}$ definierten lokal biholomorphen Funktionen. Mannigfaltigkeiten mit $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Struktur sind nach [Beso].V.2α.A₅-A₇ genau die allgemeinen riemannschen Flächen.

(vi) Sei C^∞ die Pseudogruppe der auf offenen Umgebungen des $\mathbb{R}^n$ erklärten lokalen Diffeomorphismen. Dann liefert der Begriff der $(C^\infty, \mathbb{R}^n)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten genau den wohlbekannten Begriff der n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten.

Die Typen (i)–(iv) strukturierter Mannigfaltigkeiten sind nach 1.4(i) bzw. 1.9(iii)/1.4(ii) wohlstrukturiert. Die im Sinne von (v) beschriebenen riemannschen Flächen kann man dagegen nicht als wohlstrukturierte Mannigfaltigkeiten auffassen: Zwar sind die biholomorphen Funktionen analytisch, aber nicht notwendig auf ganz $\mathbb{C}$ fortsetzbar, sodaß sie keine Strukturgruppe ergeben.

Bei (i) und (ii) haben wir unter den Bezeichnungen $\text{Aut}(\mathbb{C})$ und $\text{Iso}(\mathbb{C})$ jeweils nur die orientierungserhaltend operierenden Ähnlichkeitsabbildungen bzw. Bewegungen zusammengefaßt. Es erscheint sinnvoll, $\text{Aut}(\mathbb{C})$ und $\text{Iso}(\mathbb{C})$ so zu definieren, da wir ja als



Zielvorgabe (vgl. 1.1) nur orientierte Mannigfaltigkeiten betrachten wollen. Die strikte Beschränkung auf orientierungserhaltend operierende Pseudogruppen $\wp$ und Strukturgruppen G bewirkt dann ja, daß analog wie in der Differentialgeometrie alle $(\wp, X)$ - und (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten automatisch orientierbar werden und eine ausgezeichnete Orientierung der Grundmannigfaltigkeit sich auf sie überträgt. Von daher werden wir auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit mit Termen wie "Bewegung" oder "Ähnlichkeitsabbildung" stets nur orientierungserhaltend operierende Abbildungen damit meinen, selbst wenn wir es nicht jedesmal extra betonen.

2.3 Strukturen auf Orbiträumen:

Sei G eine quasianalytisch operierende Gruppe auf einer Grundmannigfaltigkeit X und $H \subset G$ eine Untergruppe, die eigentlich diskontinuierlich und frei auf X operiert. Nach den Erkenntnissen der allgemeinen Topologie ist unter diesen Voraussetzungen der Orbitraum X/H eine Mannigfaltigkeit. Durch die folgende kanonische Konstruktion erklären wir dann den Atlas " $\mathcal{A}_H$ " für X/H : Sei $q: X \rightarrow X/H$, $x \mapsto [x]$ die kanonische Projektion und $\mathcal{U} := \{U \overset{\text{offen}}{\subset} X \mid q|_U \text{ ist injektiv}\}$. Weil H eigentlich diskontinuierlich und frei operiert, ist $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X . Damit bildet

$$(1) \quad \mathcal{A}_H := \{(q(U), (q|_U)^{-1}) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

einen (G, X) -Atlas von X/H , der nach 1.7 zu $\widetilde{\mathcal{A}_H}^G$ vervollständigt werden kann: $(X/H, \widetilde{\mathcal{A}_H}^G)$ ist also eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit, die wir meistens abkürzend nur mit X/H bezeichnen.

2.4 Die Standarddarstellung der euklidischen Ähnlichkeitstori erhalten wir als Sonderfall von 2.3:

Es seien $\tau_1, \tau_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zwei linear unabhängige Translationen, $X := \mathbb{C}$, $G := \text{Aut}(\mathbb{C})$ und $H := \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ (d.h. die von diesen beiden Translationen erzeugte Gruppe). Dann bildet

$$M = (\mathbb{C} / \langle \tau_1, \tau_2 \rangle, \widetilde{\mathcal{A}_{\langle \tau_1, \tau_2 \rangle}^{\text{Aut}(\mathbb{C})}})$$

die standardmäßige Beschreibung eines euklidischen Ähnlichkeitstorus, d.h. eines Torus mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur, dessen Struktur jedoch bereits im Sinne von 1.11 durch einen nicht-maximalen Atlas beschrieben werden kann, bei dem nur Übersetzungsabbildungen aus $\text{Iso}(\mathbb{C})$ auftreten.

Neben den eben genannten Quotiententopologien sind Fundamentalbereiche eine weitere beliebte Art, um sich Mannigfaltigkeiten vorzustellen:

2.5 Definition: Im allgemeinen versteht man unter dem Fundamentalbereich einer Mannigfaltigkeit M eine in die Grundmannigfaltigkeit X eingebettete Zelle B zusammen mit Identifikationsvorschriften für die Segmente ihres Randes, sodaß durch das Ausführen dieser Identifikationen unsere Mannigfaltigkeit M entsteht. Im Zuge der Theorie der strukturierten Mannigfaltigkeiten müssen wir diese Definition etwas modifizieren: Wir bezeichnen eine in X eingebettete (abgeschlossene) Zelle B , auf der Identifikationsvorschriften für den Rand ∂B gegeben sind, als "Fundamentalbereich von M ", falls φ bzw. G eindeutige Fortsetzungen der Identifikationsvorschriften für ∂B auf eine reguläre Umgebung $U(\partial B)$ zu einer Menge von lokalen Homöomorphismen $\{f_i \mid i \in I\}$ zuläßt, sodaß die kanonische Projektion

$$q : B \cup U(\partial B) \rightarrow (B \cup U(\partial B)) / \{f_i \mid i \in I\}$$

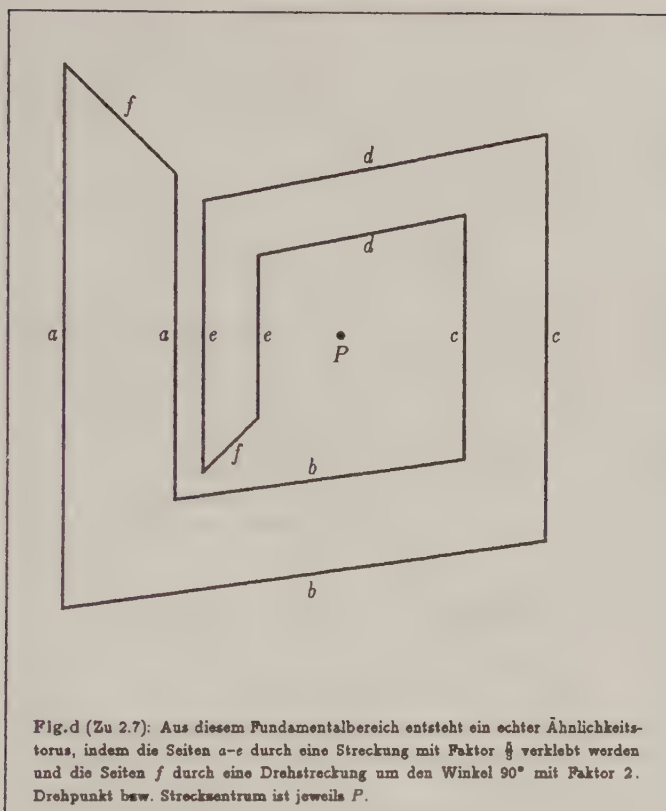
nach dem in 2.3(1) beschriebenen Schema einen (φ, X) bzw. (G, X) -Atlas $\mathcal{A}$ für $(B \cup U(\partial B)) / \{f_i \mid i \in I\}$ definiert, sodaß

$$((B \cup U(\partial B)) / \{f_i \mid i \in I\}, \tilde{\mathcal{A}})$$

strukturertreu homöomorph zu M ist. Es ist ferner erforderlich, daß jeder Punkt von $(B \cup U(\partial B)) / \{f_i \mid i \in I\}$ einen Repräsentanten innerhalb von B enthält, und daß dies der einzige Repräsentant innerhalb von B ist, falls er in $\overset{\circ}{B}$ liegt.

2.6 Fundamentalbereiche der euklidischen Ähnlichkeitstori: Die euklidischen Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung (vgl. 2.4) besitzen damit alle parallelogrammförmige Fundamentalbereiche: Ist $M = \mathbb{C} / \langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ und $\tau_j(0) = a_j$ für $j \in \{1, 2\}$, so ist z.B. das von den Strecken $\overline{0, a_1}$, $\overline{a_1, a_1 + a_2}$, $\overline{a_1 + a_2, a_2}$ und $\overline{a_2, 0}$ berandete Parallelogramm zusammen mit der Vorschrift, die gegenüberliegenden Kanten durch Translationen zu identifizieren, ein Fundamentalbereich von M (siehe Fig.b).

2.7 Beispiele echter Ähnlichkeitstori, d.h. Beispiele für Tori mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur, deren Struktur nicht durch einen $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Atlas beschrieben werden kann,



sind in Fig.c und Fig.d jeweils mit Hilfe eines Fundamentalbereichs dargestellt. Daß diese Beispiele wirklich "echt" (und nicht "euklidisch") sind, folgt freilich erst mit 3.8.

2.8 $\tilde{\mathcal{C}}^*$ als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit:

Sei $\tilde{\mathcal{C}}^*$ die universelle Überlagerung von $\mathcal{C}^* = \mathcal{C} - \{0\}$, d.h. ein einfach zusammenhängender topologischer Raum, auf dem eine Überlagerungsprojektion $p: \tilde{\mathcal{C}}^* \rightarrow \mathcal{C}^*$ definiert ist. Da bei dem Atlas

$$(1) \quad \mathcal{A}_p := \{(U, p_U) \mid U \overset{\text{offen}}{\subset} \tilde{\mathcal{C}}^*, \text{ soda\ss } p_U \text{ injektiv ist} \}$$

nur Übersetzungsabbildungen entstehen, die die Identität sind, kann $\tilde{\mathcal{C}}^*$ somit als strukturierte oder wohlstrukturierte Mannigfaltigkeit jedes auf der Grundmannigfaltigkeit $\mathcal{C}$ zu erklärenden Typs (wohl)strukturierter Mannigfaltigkeiten aufgefaßt werden. In dieser Arbeit betrachten wir $\tilde{\mathcal{C}}^*$ meistens als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit:

$$\tilde{\mathcal{C}}^* := (\tilde{\mathcal{C}}^*, \tilde{\mathcal{A}}_p^{\text{Aut}(\mathcal{C})}).$$

Auf dem Raum $\tilde{C}^*$ führen wir insbesondere feste Koordinaten ein, und zwar setzen wir

$$(2) \quad \tilde{C}^* := \{(a, \varphi) \mid a \in C^*, \varphi \in \mathbb{R}, \text{ wobei } \varphi \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}\}.$$

Mit Hilfe dieser Koordinaten können wir auch die vier wichtigsten Abbildungen von und nach $\tilde{C}^*$ beschreiben:

- (i) $\text{Cpl} : \tilde{C}^* \rightarrow C^*$, $(z, \varphi) \mapsto z$, "Komplexanteil"
- (ii) $\text{Arg} : \tilde{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $(z, \varphi) \mapsto \varphi$, "Absolutes Argument"
- (iii) $\text{Log} : \tilde{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$, $(z, \varphi) \mapsto \ln(|z|) + i \cdot \varphi$,
- (iv) $\text{Exp} : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{C}^*$, $z \mapsto (\exp(z), \Im(z))$.

2.9 $\tilde{C}^*$ als riemannsche Fläche:

$(\tilde{C}^*, \mathcal{A}_{\tilde{C}^*})$ ist im Sinne der Theorie der riemannschen Flächen gerade diejenige riemannsche Fläche, auf die sich die Logarithmus-Funktion fortsetzen läßt. "Log", definiert nach 2.8(iii), ist genau eine solche Fortsetzung zu einer biholomorphen Abbildung. Damit sind $\tilde{C}^*$ und $\mathbb{C}$ zueinander $(C^\omega, \mathbb{C})$ -strukturertretend homöomorph, d.h. als riemannsche Flächen konform äquivalent. Diese beiden Räume sind aber, als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten aufgefaßt, keineswegs strukturgleich (siehe 3.7).

Wir werden übrigens die in 2.8(i)-2.8(iv) genannten Bezeichnungen den von und nach $\tilde{C}^*$ laufenden Abbildungen vorbehalten und die zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ verlaufenden entsprechenden Funktionen wie folgt bezeichnen:

- (i) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow C^*$, $\exp(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \cdot z^\nu$,
- (ii) $\log : C^* - \mathbb{R}_- \rightarrow \mathbb{C}$, $\log = (\exp|_{\{z \mid -\pi < \Im(z) < \pi\}})^{-1}$,
- (iii) $e^{(\cdot)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto e^x$,
- (iv) $\ln : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln = \log|_{\mathbb{R}_+}$,
- (v) $\arg : C^* \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi \cdot \mathbb{Z})$, $z \mapsto \varphi$, wobei $|z| \cdot \exp(i \cdot \varphi) = z$.

Aufgrund der Wahl des Wertevorrats als $(\mathbb{R}/2\pi \cdot \mathbb{Z})$ ist das komplexe Argument "arg" hier eine auf ganz C^* definierte stetige Funktion.

2.10 $\tilde{C}^*$ als Lie-Gruppe:

Man kann $(C^*, \cdot)$ als Lie-Gruppe auffassen und im Sinne der Theorie der Lie-Gruppen das C^* -Produkt auf $\tilde{C}^*$ liften. Mit den in 2.8(2) auf $\tilde{C}^*$ eingeführten Koordinaten ergibt sich so folgende Verknüpfung:

$$(1) \quad (a_1, \varphi_1) \cdot (a_2, \varphi_2) = (a_1 \cdot a_2, \varphi_1 + \varphi_2) \quad \forall (a_i, \varphi_i) \in \tilde{C}^*.$$

Mit diesem $\tilde{C}^*$ -Produkt werden die in 2.8(i)-2.8(iv) genannten Abbildungen zu Lie-Gruppen-Homomorphismen.

2.11 Bemerkung: Wo immer ein lokaler Homöomorphismus $f : M \rightarrow X$ erklärt ist, kann durch den nach 2.8(1) erklärten Atlas $\mathcal{A}_f$ auf M eine $(\wp, X)$ oder (G, X) -Struktur für jedes auf X operierende $\wp$ oder G erklärt werden. Demnach können wir definieren:

- (i) $(\mathbb{C}, \mathcal{A}_{\text{Id}}^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$, wobei hier $\text{Id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die Identität ist. Diese Definition besagt, daß die Ebene $\mathbb{C}$ mit ihrer üblichen Geometrie als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit aufzufassen ist. Dieses Beispiel zeigt auch, daß für jeden Typ $(\wp, X)$ -strukturierter Mannigfaltigkeiten die Grundmannigfaltigkeit X auch als $(\wp, X)$ -strukturierte Mannigfaltigkeit angesehen werden kann.

(ii) Betrachten wir dagegen $(C, \widetilde{\mathcal{A}_{\text{exp}}}^{\text{Aut}(C)})$, so definiert das auch eine Ähnlichkeitsstruktur auf C . Die Wahl des Atlases $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ impliziert jedoch, daß die Ähnlichkeitsgeometrie (vgl. §3) auf C durch die Karten des Atlases $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ induziert wird. Das bedeutet, daß Geradensegmente, die durch die Abbildung exp auf gekrümmte Kurven abgebildet werden, im Sinne der Ähnlichkeitsgeometrie von $(C, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ nicht als gerade gelten, während gekrümmte Kurven, die durch exp auf Geradensegmente abgebildet werden, als gerade anzusehen sind (vgl. 3.2/3.5(iv)). D.h. der Atlas $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ induziert auf C eine andere Geometrie als die, die wir gewohnt sind. Da $\text{Exp} : (C, \mathcal{A}_{\text{exp}}) \rightarrow (\tilde{C}^*, \mathcal{A}_{\text{Cpl}})$ ein $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturerthaltender Homöomorphismus ist und diese beiden Räume damit strukturgleich sind, wären wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit grundsätzlich in der Lage, alle Konstruktionen, die wir auf $\tilde{C}^*$ durchführen, auch nach C zu verlagern. Wir müßten dann allerdings bereit sein, den Raum C mit zwei verschiedenen Geometrien, nämlich der von $(C, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ und der von $(C, \mathcal{A}_{\text{Id}})$ zu betrachten. Wir wollen das nicht tun, sondern bei C stets die übliche Geometrie implizieren, und daneben eben den Raum $\tilde{C}^*$, so wie in 2.8 beschrieben, betrachten. Da $(C, \mathcal{A}_{\text{exp}})$ einem immer als ein Raum erscheinen wird, auf dem die durch $\mathcal{A}_{\text{exp}}$ induzierte und die übliche Geometrie von C latent nebeneinander existieren, und da wir eine große Zahl von Begriffen gebrauchen, deren Bedeutung von der Geometrie, auf der sie sich beziehen, abhängt, erscheint uns unser Vorgehen das für den Leser weniger verwirrende.

2.12 Definition der $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Mannigfaltigkeiten: Nach 1.9(iii)/2.8/2.10/1.4(ii) können wir auch $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeiten betrachten. Ist z.B. H eine auf $\tilde{C}^*$ eigentlich diskontinuierlich und frei operierende Untergruppe ihrer Linksoperationen, so kann analog wie 2.3 der Orbitraum $\tilde{C}^*/H$ definiert werden. In diesem Zusammenhang wird die Grundmannigfaltigkeit $\tilde{C}^*$ nach dem in 2.1 beschriebenen Schema als Objekt einer Kategorie XXX aufgefaßt, die nur die zu $\tilde{C}^*$ koordinatengleichen (vgl. 2.8(2)) Räume umfaßt.

Um die auf $\tilde{C}^*$ operierenden Gruppen möglichst einfach beschreiben zu können, ist folgender Begriff von Nutzen:

2.13 Definition und Bemerkung: Sei $A \in \tilde{C}^*$ und $x \in C$. Dann kann eine allgemeine Potenz $A^x \in \tilde{C}^*$ eindeutig erklärt werden durch:

$$(1) \quad A^x := \text{Exp}(x \cdot \text{Log}(A)).$$

Exp und Log sind nach 2.8(iii) und 2.8(iv) definiert und genügen als Lie-Gruppen-Isomorphismen (vgl. 2.10) analogen Funktionalgleichungen wie exp und $\ln$:

$$(2) \quad \begin{aligned} \text{Exp}(x) \cdot \text{Exp}(y) &= \text{Exp}(x + y) \quad \forall x, y \in C \quad \text{und} \\ \text{Log}(X) + \text{Log}(Y) &= \text{Log}(X \cdot Y) \quad \forall X, Y \in \tilde{C}^*. \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Funktionalgleichungen ergibt sich, daß dieser Potenzbegriff den üblichen aus der reellen Analysis als "Potenzgesetze" bekannten Regeln genügt.

2.14 Standarddarstellung der $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Tori: Seien $A_1, A_2 \in \tilde{C}^*$ und nicht reelle Potenz voneinander. Dann beschreibt $\tilde{C}^*/\langle A_1, A_2 \rangle$ einen Torus mit $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Struktur

gemäß 2.3 und 2.12. Die Wohldefiniertheit dieser Definition ergibt sich dadurch, daß die Abbildung Log diese ganze Konstruktion auf die Standarddarstellung eines euklidischen Ähnlichkeitstorus gemäß 2.4 abbildet, wobei die Bedingung "nicht reelle Potenz voneinander" dabei genau in die für euklidische Ähnlichkeitstori geforderte Bedingung "linear unabhängig" übergeht ($(z_1, z_2) \in C$):

$$(1) \quad \begin{aligned} (z_1, z_2 \text{ linear unabhängig}) &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \lambda \cdot z_1 = z_2) \\ &\iff (\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } \text{Exp}(\lambda \cdot z_1) = \text{Exp}(z_2)) \\ &\stackrel{2.13}{\iff} (\exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ mit } (\text{Exp}(z_1))^\lambda = \text{Exp}(z_2)) \end{aligned}$$

Ist $z_1 = 0$ und $z_2 \neq 0$, so sind die Rollen von z_1 und z_2 zu vertauschen.

2.15 Die Standarddarstellung der echten Ähnlichkeitstori entsteht, indem wir die in 2.14 beschriebenen $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Tori dadurch in $(\text{Aut}(C), C)$ -Tori verwandeln, daß wir die Koordinatenabbildungen ihres Atlases mit Cpl verketten und somit nicht in $\tilde{C}^*$, sondern in C enden lassen. Präziser:

Sei $(M, \mathcal{A})$ eine $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Mannigfaltigkeit, wobei $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ ist, so bildet

$$(1) \quad \mathcal{A}' = \{(U_i, \text{Cpl} \circ \phi_i) \mid i \in I, \phi_i(U_i) \text{ ist ein Homöomorphiebereich von Cpl}\}$$

einen $(\text{Aut}(C), C)$ -Atlas, denn die bei $\mathcal{A}$ in $\tilde{C}^*$ entstehenden Übersetzungsabbildungen waren durch $\tilde{C}^*$ -Produkte zu beschreiben, die ja nach Konstruktion nur Liftungen von Drehstreckungen um den Nullpunkt an Cpl waren. Ist also $(M, \mathcal{A})$ eine $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Mannigfaltigkeit, so ist $(M, \widetilde{\mathcal{A}}^{\text{Aut}(C)})$ eine $(\text{Aut}(C), C)$ -Mannigfaltigkeit. Indem wir M die in 2.14 beschriebenen $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Tori durchlaufen lassen, erhalten wir die Standarddarstellungen der echten Ähnlichkeitstori, wobei wir erst in 3.8 beweisen können, daß es wirklich echte Ähnlichkeitstori sind.

Um einen echten Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung zu bezeichnen, dürfen wir nicht einfach $\tilde{C}^*/\langle A_1, A_2 \rangle$ schreiben, denn nach 2.3 würde dies ja eine strukturierte Mannigfaltigkeit bezeichnen, deren Strukturtyp auf der Grundmannigfaltigkeit $\tilde{C}^*$ erklärt ist. Um dennoch einen solchen echten Ähnlichkeitstorus bezeichnen zu können ohne den zugehörigen Atlas mit anzugeben, führen wir darum jetzt die Schreibweise

$$\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle A_1, A_2 \rangle)$$

ein. Der Operator Γ_{Cpl} drückt dabei das Verlängern der Karten von $\tilde{C}^*/\langle A_1, A_2 \rangle$ durch Cpl im Sinne von (1) aus. Das allgemeine Konzept, das sich hinter dieser Bezeichnung " Γ_{Cpl} " verbirgt, wird erst in D.1.3/D.1.6(i) deutlich.

Wir sind damit bereits jetzt in der Lage, die wichtigsten Aussagen zur Klassifikation der geschlossenen $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten zu formulieren:

2.16 Formulierung der Klassifikationssätze:

- (1.) Zwei gemäß 2.4 in Standarddarstellung gegebene euklidische Ähnlichkeitstori C/H_1 und C/H_2 sind genau dann strukturgleich, wenn H_1 in $\text{Aut}(C)$ zu H_2 konjugiert ist (siehe B.1.21).

(2.) Zwei gemäß 2.15 in Standarddarstellung gegebene echte Ähnlichkeitstori

$\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H_1)$ und $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H_2)$ sind genau dann strukturgleich, wenn $H_1 = H_2$ gilt (siehe B.3.24).

(3.) Jede geschlossene $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturierte Fläche ist strukturgleich zu einem Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung (siehe D.5.2).

2.17 Überlagerungen strukturierter Mannigfaltigkeiten:

(i) : Sei $(N, \mathcal{A})$ eine (φ, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit, wobei $\mathcal{A} = \{(V_j, \phi_j) \mid j \in J\}$ ist, ferner M eine Mannigfaltigkeit und $f : M \rightarrow N$ ein lokaler Homöomorphismus. Mit $\mathcal{U}$ bezeichnen wir dann eine Überdeckung von M , sodaß für alle $U \in \mathcal{U}$ die Restriktion $f|_U$ injektiv ist und $f(U)$ durch eine Koordinatenumgebung aus $\mathcal{A}$ überdeckt wird; der Index dieser Karte werde mit $j(U)$ bezeichnet. Dann bildet

$$(1) \quad f^{-1}(\mathcal{A}) := \{(U, \phi_{j(U)} \circ (f|_U)) \mid U \in \mathcal{U}\}$$

einen (φ, X) -Atlas von M . Wenn wir dann $(M, \widetilde{f^{-1}(\mathcal{A})}^P)$ als (φ, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit auffassen, so ist f strukturerhaltend. Umgekehrt hätte nach 1.8 auf M auch durch keinen anderen Atlas eine (φ, X) -Struktur so eingeführt werden können, daß f strukturerhaltend geworden wäre.

(ii) : Nach dem Konzept von (i) wird auf jeder Überlagerung einer (φ, X) -strukturierten Mannigfaltigkeit eine (φ, X) -Struktur dadurch ausgezeichnet, daß die Überlagerungsprojektion damit zu einer strukturerhaltenden Abbildung wird. Wenn wir im Zuge der Theorie der (φ, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten den Begriff "Überlagerung" benutzen, so implizieren wir damit stets, daß auf den Überlagerungsräumen diese Struktur erklärt worden ist. Damit überträgt sich die Existenzaussage für Überlagerungen von der allgemeinen Topologie in die Theorie der (φ, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten. (iii) : Mit der in (ii) getroffenen Konvention wird jede Liftung einer strukturerhaltenden Abbildung auf eine Überlagerung wieder strukturerhaltend. Außerdem folgt nach 1.8(iii)/1.8(iv), daß alle äquivarianten Homöomorphismen (insbesondere alle Deckbewegungen), automatisch strukturerhaltend werden. Letzteres bedeutet insbesondere eine Eindeutigkeitsaussage für die im Zuge der Theorie der strukturierten Mannigfaltigkeiten zu konstruierenden Überlagerungsräume.

(iv) : Sei $i : C^* \hookrightarrow C$ die Inklusion. Die unter Ziffer 2.8 definierte Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit $\tilde{C}^*$ ist damit auch im Sinne von (ii) die universelle Überlagerung von C^* (präziser von $(C^*, \mathcal{A}_i)$) und Cpl (vgl. 2.8(i)) dabei die strukturerhaltende Überlagerungsprojektion.

(v) : Sei $M = C/H$ gemäß 2.4. Da die Definition des zugehörigen Atlas nach 2.3(1) impliziert, daß die kanonische Projektion $q : C \rightarrow C/H$ strukturerhaltend wird, kann C somit als universelle Überlagerung aller in Standarddarstellung gegebener euklidischer Ähnlichkeitstori aufgefaßt werden.

Ist $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ gemäß 2.15, so ist nach Definition der Atlanten 2.15(1) und 2.8(1) die kanonische Projektion $q : \tilde{C}^* \rightarrow \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ eine strukturerhaltende Abbildung dieser $(\text{Aut}(C), C)$ -Mannigfaltigkeiten. Da nach 2.8(iii)/2.9 $\tilde{C}^*$ einfach zusammenhängend ist, kann $\tilde{C}^*$ damit als universelle Überlagerung aller in Standarddarstellung gegebener echter Ähnlichkeitstori aufgefaßt werden.

2.18 Konvention: Die Blatteinteilung auf den universellen Überlagerungen der echten Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung:

Sei gemäß 2.15 $M = \tilde{C}^* / \langle S_1, S_2 \rangle$ der hier betrachtete Torus, wobei S_1, S_2 ja nicht reelle Potenzen voneinander sein dürfen. Entsprechend 2.17(v) können wir dann $\tilde{C}^*$ als universelle Überlagerung von M auffassen. Unter Ausnutzung der in 2.13 eingeführten Potenzen in $\tilde{C}^*$ lassen sich Blatteinteilung, Deckbewegungen und ein Fundamentalsystem für die echten Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung wie folgt beschreiben:

(i) Die zwei Wege

$$v_j : [0, 1] \rightarrow \tilde{C}^* / \langle S_1, S_2 \rangle \quad , \quad t \mapsto S_j^t$$

($j \in \{1, 2\}$) bilden ein Fundamentalsystem unseres Torus. Als Liftung in die universelle Überlagerung davon zeichnen wir insbesondere folgende zwei Kurven aus:

$$\tilde{v}_j : [0, 1] \rightarrow \tilde{C}^* \quad , \quad t \mapsto S_j^t$$

(ii) Indem wir alle möglichen Liftungen der Wege v_1 und v_2 nach $\tilde{C}^*$ betrachten, entsteht (wie in der Topologie für die universelle Überlagerung allgemein gezeigt wird), ein gitterartiges Netz von Kurven. In unserem Fall kann dieses Gitter beschrieben werden als

$$\{S_1^a \cdot S_2^b \mid (a, b) \in (\mathbb{R} \times \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} \times \mathbb{R})\}.$$

(iii) Die Abschlüsse der Zusammenhangskomponenten, in die jenes Gitter $\tilde{C}^*$ zerlegt, können als Blätter der Überlagerung von M interpretiert werden. Wir bezeichnen diese Blätter wie folgt ($i, j \in \mathbb{Z}$):

$$B_{i,j} := \{S_1^a \cdot S_2^b \mid i \leq a \leq i+1, j \leq b \leq j+1\}$$

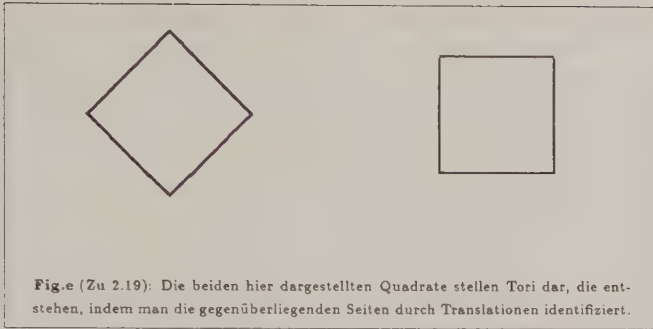
(iv) Als Deckbewegungsgruppe dieser universellen Überlagerung tritt dabei

$$\text{Deck}(M) = \{\sigma_{k,m} : Z \mapsto S_1^k \cdot S_2^m \cdot Z \mid k, m \in \mathbb{Z}\}$$

auf.

(v) Beachte, daß das in den Punkten (ii)–(iv) beschriebene Gitter, sowie die demgegenüber invariant operierende Deckbewegungsgruppe bzw. die Pflasterung von $\tilde{C}^*$ durch Fundamentalbereiche durch die Abbildung Log auf eine Pflasterung der euklidischen Ebene mit zueinander kongruenten Parallelogrammen und eine demgegenüber invariant operierende Translationsgruppe abgebildet werden. Analog könnte auch (die kanonische Projektion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\langle a_1, a_2 \rangle$) erweist sich als universelle Überlagerung der euklidischen Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung) eine entsprechende Blatteinteilung bei den euklidischen Ähnlichkeitstori vorgenommen werden.

2.19 Bemerkung: Die beiden in Fig.e gezeichneten kongruenten Quadrate sind als Fundamentalbereiche euklidischer Ähnlichkeitstori wie in 2.6 zu verstehen. Entsprechend 2.5/2.3(1) definieren diese Quadrate also Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 (mit nicht-maximalen Atlanten $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$. Die Ähnlichkeitstori $(M_1, \widetilde{\mathcal{A}}_1^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$ und



$(M_2, \widetilde{\mathcal{A}}_2^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$ sind strukturgleich, da eine euklidische Bewegung, die die beiden Quadrate ineinander überführen würde, ja einen $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturerhaltenden Homöomorphismus induzieren würde. Analog erkennt man, daß $(M_j, \widetilde{\mathcal{A}}_j^{\text{Iso}(\mathbb{C})})$ für $j \in \{1, 2\}$ auch als euklidische Ähnlichkeitstori strukturgleich sind. Dagegen sind, wie wir uns in 3.6 überlegen werden, die Translationstori $(M_j, \widetilde{\mathcal{A}}_j)$ nicht strukturgleich.

Wir stellen uns jetzt vor, die beiden in Fig.e dargestellten Quadrate wären nicht in die Grundmannigfaltigkeit $\mathbb{C}$, sondern in eine euklidische Ebene E^2 gezeichnet. E^2 und $\mathbb{C}$ beschreiben zwar im Prinzip Ebenen mit derselben Geometrie, mit dem Unterschied freilich, daß in $\mathbb{C}$ Koordinatenursprung, reelle und imaginäre Achse sowie für jeden Punkt Koordinaten gegeben sind. Dagegen sind in E^2 nur die Begriffe der euklidischen Geometrie (Geraden, Längen, Winkel, Abstände) erklärt, aber kein Punkt ist vor dem anderen ausgezeichnet. Dies bewirkt vor allem, daß die im Sinne der Definition 1.9(1) zu betrachtende Gruppe $\text{Aut}_{\text{XXX}}(E^2)$ die volle Gruppe der euklidischen Bewegungen ist. Die auf E^2 erklärte euklidische Geometrie reicht aus, um dort die Gruppe der (orientierungserhaltenden) Ähnlichkeitsabbildungen, der (orientierungserhaltenden) euklidischen Bewegungen und damit auch zu der Grundmannigfaltigkeit E^2 im Sinne von 1.9(ii) gebildete Strukturtypen. Die Ergebnisse über die (Nicht-)Strukturgleichheit von M_1 und M_2 sind beim Arbeiten mit der Grundmannigfaltigkeit E^2 genauso wie beim Arbeiten mit der Grundmannigfaltigkeit $\mathbb{C}$. Allerdings ist zu beachten, daß die Gruppe der Translationen als Strukturgruppe die in 1.9(ii) genannte Bedingung, die Gruppe $\text{Aut}_{\text{XXX}}(E^2)$ als Untergruppe zu enthalten, verletzt. Es ist also nach 1.9(ii) nicht statthaft, Translationsmannigfaltigkeiten auf der Grundmannigfaltigkeit E^2 zu betrachten. Am Beispiel der in Fig.e gezeichneten Tori möchten wir verdeutlichen, warum diese Beschränkung sinnvoll ist.

Angenommen, die beiden Zeichnungen seien nicht wie bei Fig.e in einem Bild vereinigt, sondern wären bei verschiedenen Gelegenheiten auf verschiedenen Blättern Papier angefertigt worden, und es sei die Frage zu beantworten, ob die beiden dadurch dargestellten Tori als Translationstori dabei übereinstimmen oder nicht. Wir müßten dann die beiden Blätter Papier, die je jeweils ein Modell für einen Ausschnitt der euklidischen Ebene abgeben, irgendwie aufeinander beziehen, um diese Frage beantworten zu können. Dabei

sind je zwei Identifikationsabbildungen, die sich nur um eine euklidische Bewegung unterscheiden, nicht gegeneinander ausgezeichnet. Andererseits hängt von der Wahl einer solchen Identifikationsabbildung nun ab, ob wir die beiden Tori als strukturgleich oder als wesentlich verschieden ansehen müssen. Denn es gilt (vgl. 3.6), daß zwei durch zwei gleich große Quadrate gegebene Translationstori nur dann übereinstimmen, wenn die Modelle der euklidischen Ebene, in denen sie dargestellt sind, so aufeinander zu beziehen sind, daß die beiden Quadrate durch Translation ineinander überführbar sind. D.h. die Frage nach der Strukturgleichheit zweier in verschiedenen Modellen der euklidischen Ebene durch gleich große Quadrate gegebener Translationstori wäre gar nicht allgemein zu beantworten, was wohl als eine Unschönheit der Theorie empfunden werden müßte. Wenn wir uns auf den Standpunkt verlegten, es gäbe nur eine euklidische Ebene und in dieser seien alle Translationstori zu modellieren, so würden wir damit zwar den Status der Wohldefiniertheit erreichen, aber die Unschönheit, zwar eine Liste aller Strukturen erstellen, aber eine konkret konstruierte Mannigfaltigkeit nicht darin einordnen zu können, bliebe. Durch die Forderung, daß die Strukturgruppe G stets die Automorphismengruppe Aut_{XXX} der Grundmannigfaltigkeit X umfassen muß, vermeiden wir diese Unschönheit. Denn alle Uneindeutigkeiten, die durch die verschiedenen Möglichkeiten entstehen, Modelle der Grundmannigfaltigkeit aufeinander zu beziehen, liegen damit ja innerhalb des Bereichs der zulässigen Kartenwechsel und werden damit niemals dafür entscheidend, ob zwei Mannigfaltigkeiten nun strukturgleich sind oder nicht.

§3: Die Geometrie der strukturierten Mannigfaltigkeiten

3.1 Definition: Seien $\wp_1$ bzw. G_1 und $\wp_2$ bzw. G_2 auf der Grundmannigfaltigkeit X operierende (Pseudo-)Gruppen. Es gelte $\wp_1 \subset \wp_2$ bzw. $\wp_{G_1} \subset \wp_2$ bzw. $G_1 \subset G_2$. Dann heißt der Typ der $(\wp_1, X)$ - bzw. (G_1, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten "restriktiver" als der Typ der $(\wp_2, X)$ - bzw. (G_2, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten.

3.2 Zum Prinzip, nach dem auf strukturierten Mannigfaltigkeiten die Grundbegriffe der Geometrie erklärt werden:

Sei M eine $(\wp; X)$ -Mannigfaltigkeit und $N \subset M$. Dann wird die Geometrie von M dadurch definiert, daß die auf die Teilmenge N bezogene Aussage $A(N)$ genau dann als wahr gilt, wenn alle Aussagen $A(\phi(N))$ als wahr gelten für alle Karten (U, ϕ) des maximalen $(\wp, X)$ -Atlases von M , bei denen $U \supset N$ gilt. Dasselbe Prinzip gilt bei Aussagen, die einer Funktion $f: Y \rightarrow N \subset M$ zugeordnet sind, wobei Y ein fester Raum ist: eine solche Aussage für ein festes A und ein festes f wird genau dann als wahr definiert, wenn sich alle Aussagen $A(\phi \circ f)$ als wahr erweisen. Nach diesem Prinzip übertragen sich also all diejenigen Begriffe von X auf die $(\wp, X)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten, die invariant gegenüber den Operationen von $\wp$ sind. Die auf die Art induzierten Geometrien werden daher um so reichhaltiger, je restriktiver die betrachteten Typen strukturierter Mannigfaltigkeiten werden; auf jeden Fall gilt, daß alle Begriffe, die in der Geometrie einer dieser Kategorien erklärt sind, auch auf allen restriktiveren Kategorien erklärt sind. Es ist jedoch zu beachten, daß dieses Prinzip nur Anwendung findet, um

die Grundbegriffe der induzierten Geometrie auf den strukturierten Mannigfaltigkeiten zu definieren.

3.3 Bemerkung: Prinzip 3.2 legt nahe, die Geometrie der Grundmannigfaltigkeit im Sinne von Felix Kleins Erlanger Programm [Kln1] als die Geometrie der Invarianten unter der Strukturgruppe bzw. der Pseudogruppe aufzufassen. Diese Invarianten werden dann durch die Atlanten auf die (φ, X) - bzw. (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten übertragen. Es scheint dagegen nicht ohne weiteres möglich, das Erlanger Programm direkt auf die Geometrie der strukturierten Mannigfaltigkeiten anzuwenden: Die Reichhaltigkeit der nach 3.2 induzierten Geometrie auf den strukturierten Mannigfaltigkeiten ist ja durch die Möglichkeit zu Kartenwechsel beschränkt, der Reichhaltigkeit der Gruppe der strukturerhaltenden Autohomöomorphismen ist dagegen auch von globalen Aspekten der die Mannigfaltigkeit definierenden Kartenverklebungen abhängig. Damit können diese beiden Fragen keineswegs gleichgesetzt werden.

3.4 Bemerkung: Zum Prinzip, nach dem auf strukturierten Mannigfaltigkeiten die Geometrie erklärt wird:

Die Begriffe der induzierten Geometrien auf den strukturierten Mannigfaltigkeiten werden dann im wesentlichen nach einem der beiden nachfolgend beschriebenen Möglichkeiten erklärt:

(i) Dem Prinzip 3.2

(ii) Die Begriffe werden mit Hilfe derselben Definition wie in der Grundmannigfaltigkeit (bzw. einer der äquivalenten Möglichkeiten, sie in der Grundmannigfaltigkeit zu definieren) auf diejenigen Begriffe zurückgeführt, die nach dem Prinzip 3.2 erklärt wurden.

Die Möglichkeiten (i) und (ii) führen nicht in jedem Fall zu derselben Begriffsbildung. Beispiel:

Würden wir den Begriff der "Gerade" nach dem Prinzip (i) erklären, so dürften wir also eine Kurve in einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit nur dann als "Gerade" bezeichnen, wenn sie sich durch eine Koordinatenumgebung überdecken läßt. Folgerungen dieser Definitionsmöglichkeit wären, daß sich Geraden in Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten niemals selbst schneiden würden, daß aber umgekehrt nicht jeder Tangentialvektor zu einer Gerade verlängert werden kann (nämlich dann nicht, wenn die gerade Verlängerung sich irgendwann selbst schneiden würde). Tatsächlich werden wir aber in 3.5(iv) den Geradenbegriff nach dem Prinzip (ii) definieren und von den beiden zuletzt genannten Eigenschaften wird sich bei unserer Definition dann das Gegenteil als richtig erweisen. Auf jeden Fall scheint es erforderlich, bei jedem Begriff, den wir in der Theorie strukturierter Mannigfaltigkeiten benutzen wollen, zuvor klarzustellen, wie wir diese Begriffe von der Grundmannigfaltigkeit her übertragen.

3.5 Liste der wichtigsten Begriffe der Geometrie der induzierten Mannigfaltigkeiten:

All die in dieser Liste genannte Begriffe werden nach 3.4(i) oder 3.4(ii) erklärt. Damit sind sie invariant gegenüber Kartenwechsel (was sie ja erst zu auf den strukturierten Mannigfaltigkeiten erklärbaren Begriffen macht). Daraus ergibt sich aber auch (vgl.

1.8), daß die entsprechend strukturerhaltenden Abbildung invariant gegenüber diesen Begriffen operieren.

- (i) Auf allen Typen strukturierter Mannigfaltigkeiten, die restriktiver als $(C^\infty, \mathbb{R}^n)$ sind, also insbesondere auf allen der Liste 2.2(i)–2.2(vi), sind die Begriffe der Differentialgeometrie erklärt, also z.B. Begriffe wie “differenzierbare Funktion”, “differenzierbarer Weg” oder “Tangentialvektoren”.
- (ii) Sei C_+^∞ die Unterpseudogruppe der orientierungserhaltend operierenden lokalen Diffeomorphismen von C^∞ (vgl. 2.2(vi)). Auf allen Mannigfaltigkeiten eines gegenüber $(C_+^\infty, \mathbb{R}^n)$ restriktiveren Strukturtyps (das sind insbesondere die in 2.2(i)–2.2(v) genannten) können wir die *Orientierung* wie in der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten erklären, d.h. der Atlas überträgt die kanonische Orientierung des $\mathbb{R}^n$ bzw. des C^n auf jede strukturierte Mannigfaltigkeit.
- (iii) Auf allen Strukturtypen, die restriktiver als $(C^\omega, \mathbb{C})$ sind, also insbesondere bei 2.2(i)–2.2(v), kann entsprechend Prinzip 3.2 der *Winkel* zwischen zwei Tangentialvektoren v_x, w_x gemessen werden, Bezeichnung:

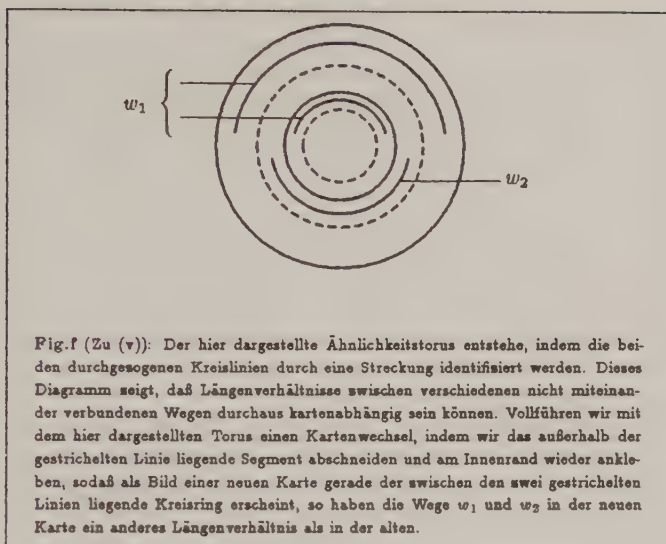
$$(1) \quad \angle(v_x, w_x).$$

Die Orientierung und der Beschränkung auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten gestattet dabei, den Winkel modulo 2π anzugeben. Da wir im Verlaufe dieser Arbeit Winkelsummen bilden wollen, treffen wir für den Winkelbegriff eine andere Konvention als für die Argumentfunktion (vgl. 2.9(v)): Wir vereinbaren hiermit, daß alle zwischen zwei Tangentialvektoren gemessenen Winkelwerte auf das offene Intervall $(-\pi, \pi)$ normiert werden. Es gilt dabei eine Vorzeichenkonvention, wonach in $\mathbb{C}$

$$(2) \quad \angle(1, i) = +\frac{\pi}{2}$$

ist. Der Winkel zwischen zwei in genau entgegengesetzte Richtung zeigende Tangentialvektoren ist zunächst nicht definiert, eine Ausnahme werden wir jedoch in B.3.3(ii) zulassen.

- (iv) Wir bezeichnen einen Weg in einer strukturierten Mannigfaltigkeit der Typen 2.2(i)–2.2(iv) (also in einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit oder einer der restriktiveren Typen) als “Gerade”, wenn er überall “gerade” und soweit als möglich verlängert ist. Wir betrachten also nur das “*gerade-Sein*” als einen nach Prinzip 3.2 definierten Grundbegriff. Ein Weg heißt dabei “gerade”, wenn zu jedem Parameterwert ein durch Umgebung dieses Parameterwertes definiertes hinreichend kurzes Segment durch jede dieses Segment überdeckende Karte auf ein Geradensegment in der Grundmannigfaltigkeit abgebildet wird.
- (v) Aufgrund der entsprechenden Invarianzeigenschaften der Ähnlichkeitsabbildungen scheint es zunächst so, als wäre der Quotient der euklidischen Weglängen zweier durch eine Karte in die Grundmannigfaltigkeit abgebildeten Wege aus einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit ein wohldefinierter Begriff, d.h. eine diesem Paar von Wegen durch die Ähnlichkeitsgeometrie zukommende Eigenschaft. Daß dem nicht so ist, zeigt Fig.f. Es ist jedoch möglich, das “*Längenverhältnis*” als Begriff der Ähnlichkeitsgeometrie



zu etablieren, solange wir uns darauf beschränken, zwei Teilsegmente ein- und desselben rektifizierbaren Weges miteinander zu vergleichen. Dieser Weg muß dann nicht einmal durch eine Koordinatenumgebung überdeckbar sein (siehe B.2.3), vorläufig beschränken wir uns jedoch nur auf diesen Fall und definieren:

Sei M eine $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierte Mannigfaltigkeit oder eine Mannigfaltigkeit der restriktiveren Typen (z.B. 2.2(ii)-2.2(iv)), $w : [a, d] \rightarrow U \subset M$ und (U, ϕ) eine Karte eines die Struktur von M beschreibenden Atlases. Dann ist für $b, c \in [a, d]$

$$q(w, \frac{(b_1, b_2)}{(c_1, c_2)}) := \frac{\ell(\phi \circ w|_{[b_1, b_2]})}{\ell(\phi \circ w|_{[c_1, c_2]})},$$

wobei ℓ die übliche euklidische Weglänge in $\mathbb{C}$ bezeichnet.

(vi) Es wird im Laufe der Arbeit (§C.1, insbesondere C.1.2 und C.1.9) noch gezeigt, daß auf den $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ - und $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten eindeutig eine Metrik induziert wird. Dies ist allerdings nicht durch direkte Anwendung des Prinzips 3.2 zu erreichen, denn es gibt nun mal keine ausgezeichnete $\{P, Q\}$ überdeckende Karte (U, ϕ) , die man heranziehen könnte, um den Abstand $\rho(P, Q)$ auf den Abstände $\rho(\phi(P), \phi(Q))$ in der Grundmannigfaltigkeit zurückzuführen. Wir werden im Laufe der Arbeit noch darlegen (C.1.2/C.1.3), wie im Falle von $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ aus der Invarianz einer Strukturgruppe gegenüber Abständen die Abstandsmessung auch auf die entsprechend strukturierten Mannigfaltigkeiten übertragen werden kann. Dies wird im wesentlichen dann der Fall sein, wenn die Metrik auf den im nachfolgenden Punkt erklärten Begriff zurückgeführt werden kann.

(vii) In $\mathbb{C}$ kann die Länge eines Weges $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ durch das Integral $\ell(w) = \int_a^b |w'(t)| dt$ ausgerechnet werden. Dabei gilt $\ell(w) = \ell(f \circ w)$, wenn $f \in \text{Iso}(\mathbb{C})$ ist.

Die Invarianz der Weglänge gegenüber $\text{Iso}(\mathbb{C})$ gilt auch, wenn wir w in Segmente zerlegen und die Segmente durch verschiedene Bewegungen in der Ebene verschieben, dann einzeln messen und wieder addieren. Damit ist diese euklidische *Weglänge* ein Begriff, der gemäß Prinzip 3.2 auf allen $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten und den Mannigfaltigkeiten der noch restriktiveren Typen (insbes. $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$) erklärt ist, denn jeder Weg ist zumindest segmentweise durch Koordinatenumgebungen zu überdecken.

- (viii) Unter der „*Richtung*“ einer Geraden verstehen wir die eindeutige Zuordnung der Geraden zu einem Parallelenbüschel. Da Translationen Geraden immer nur auf parallele Geraden abbilden, können wir nach Prinzip 3.2 allen Geraden auf $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten eindeutig Richtungen zuordnen und folgern, daß die Richtung von $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten auch invariant gegenüber $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -strukturerhaltenden Abbildungen bleibt.

3.6 Nachtrag zum Beispiel 2.19:

Wir möchten jetzt zeigen, daß die beiden durch Fig.e beschriebenen Translationstori nicht strukturerhaltend homöomorph zueinander sind: Sei M ein Translationstorus, der wie in Fig.e durch die Vorschrift gegeben ist, die gegenüberliegenden Seiten eines Quadrats durch Translationen zu identifizieren. Seien τ_1 und τ_2 die dabei auftretenden Translationen. Analog zu 2.4/2.6 ersetzen wir M durch den strukturgleichen als Orbitraum gegebenen Torus $\mathbb{C}/\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$. Indem wir die kanonische Projektion $p: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ betrachten, machen wir $\mathbb{C}$ zu einer universellen Überlagerung im Sinne von 2.17(ii) dieses Torus. Wir können dann versuchen, die Menge aller in $\mathbb{C}/\langle \tau_1, \tau_2 \rangle$ zu einem festen Ausgangspunkt zurückkehrenden Geraden zu überblicken, indem wir ihre Liftungen nach $\mathbb{C}$ betrachten: jene zurückkehrenden Geraden erscheinen dann genau als die Verbindungsstrecken zwischen einer Liftung $\tilde{P}$ des Ausgangspunktes P und allen Punkten des Punktegitters $\{\tau_1^k(\tau_2^m(\tilde{P})) \mid k, m \in \mathbb{Z}\}$. Auf die Weise erkennen wir, daß die Seiten des ursprünglich gegebenen Quadrates gerade die Richtungen der kürzesten zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrenden Geraden beschreiben, und zwar unabhängig von dem gewählten Aufpunkt P . Da nach 3.5(vii)/3.5(viii) bei Translationstori diese Richtungen Invarianten gegenüber strukturerhaltenden Abbildungen sind, sind zwei durch gegeneinander verdrehte Quadrate dargestellte Translationstori folglich nicht strukturgleich. $\square$

3.7 Nachtrag zum Beispiel 2.8/2.9:

- (i) Die in 2.8(iv) definierte Abbildung Exp ist nicht $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturerhaltend.

Beweis: Mit dem in 2.8(1) eingeführten Atlas gilt nach 1.8, daß Exp nur dann strukturerhaltend sein könnte, wenn die als Übersetzungsabbildung entstehende Abbildung exp bei Einschränkung auf geeignete Koordinatenumgebungen strukturerhaltend wäre (vgl. 2.8(iv)/2.9(i)). Doch das ist nicht der Fall: exp bildet alle Parallelen zur imaginären Achse auf Kreise ab, was 3.5(iv) widerspricht und bereits in beliebig kleinen Koordinatenumgebungen spürbar ist.

- (ii) $\mathbb{C}$ und $\tilde{\mathbb{C}}^*$ sind als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten nicht strukturerhaltend homöomorph.

Beweis: Sei $a \in \mathbb{C}^*$ und $\varphi \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$. Wir betrachten mit $w : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto a \cdot t$ einen Strahl in $\mathbb{C}$ und mit $\tilde{w} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$, $t \mapsto (a \cdot t, \varphi)$ eine Liftung von $\mathbb{C}$ auf $\tilde{\mathbb{C}}^*$. Da $\tilde{\mathbb{C}}^*$ keinen Punkt über dem Nullpunkt in $\mathbb{C}$ enthält, ist $\tilde{w}$ bereits maximal verlängert und somit eine Gerade in $\tilde{\mathbb{C}}^*$. Wir wählen Parameterwerte $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$ fest und betrachten dann dazu alle Parameterwerte $s_1 < s_2$, $s_1, s_2 \in (0, t_1)$. Da die Gerade $\tilde{w}$ problemlos durch eine Karte dargestellt werden kann, ist es nach 3.5(v) uns bereits möglich, die Längenverhältnisse $q(\tilde{w}, \frac{(s_1, s_2)}{(t_1, t_2)}) = \frac{|s_2 - s_1|}{|t_2 - t_1|}$ auszurechnen und festzustellen, daß diese bei unseren Vorgaben nicht unbeschränkt sind. Damit haben wir mit den Mitteln der Ähnlichkeitsgeometrie ausgedrückt, daß eine Gerade wie $\tilde{w}$ nach einer Seite hin nicht beliebig verlängerbar ist. Da eine entsprechende Aussage für keine Gerade aus $\mathbb{C}$ gilt, in $\tilde{\mathbb{C}}^*$ aber Geraden wie $\tilde{w}$ existieren, können $\mathbb{C}$ und $\tilde{\mathbb{C}}^*$ als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten nicht strukturgleich sein. $\square$

3.8 Kriterium für die Echtheit von Ähnlichkeitsstrukturen:

Sei M ein euklidischer Ähnlichkeitstorus. Nach 2.4 heißt das, daß der maximale Ähnlichkeitsatlas $\mathcal{A}$ von M einen Teilatlas $\mathcal{A}'$ besitzt, dessen sämtliche Übersetzungsabbildungen Isometrien sind. Da wir somit die Möglichkeit haben, zum Messen von Längenverhältnissen ausschließlich Karten aus $\mathcal{A}'$ zu verwenden, gilt folgendes: Seien $v, w : [a, d] \rightarrow M$ zwei Wege, sodaß $w(t) = v(t)$ für $t \in [a, b]$ und $t \in [c, d]$ gilt ($a < b < c < d$). Dann muß, selbst wenn man verschiedene Karten braucht, um v und w zu überdecken $q(v, \frac{(a, b)}{(c, d)}) = q(w, \frac{(a, b)}{(c, d)})$ sein. Eine Situation, wie die in 3.5(Fig.f) gezeichnete, bei der verschiedene Längenverhältnisse entstehen würden, je nachdem auf welche Art man die Wege w_1 und w_2 verbindet, kann also nicht eintreten. Demnach ist die Existenz von Wegen v und w in einer Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur, bei denen mit den Annahmen von eben $q(v, \frac{(a, b)}{(c, d)}) \neq q(w, \frac{(a, b)}{(c, d)})$ gilt, ein hinreichendes Kriterium dafür, daß die Ähnlichkeitsstruktur von M echt ist.

Solche können stets leicht konstruiert werden, wenn die Mannigfaltigkeit durch einen Fundamentalbereich gegeben ist und eine der Identifikationsabbildungen keine Isometrie ist. Demnach sind die bei 2.7 in Fig.c und Fig.d dargestellten Tori echte Ähnlichkeitstori. Wir wollen dieses Argument jetzt auch benutzen, um von den in Standarddarstellung (2.15) gegebenen Tori zu zeigen, daß sie echte Ähnlichkeitstori sind:

Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^* / \langle S_1, S_2 \rangle)$. Da S_1 und S_2 nicht reelle Potenz voneinander sein dürfen, muß einer der beiden Werte (o.B.d.A. S_1) einen Streckfaktor haben, d.h. es muß $|\text{Cpl}(S_1)| \neq 1$ sein. Damit wird der Weg $w : [0, \frac{5}{4}] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto \text{Cpl}(S_1^t)$ doppeltpunktfrei. Die Liftung von w zu einem Weg $\tilde{w} : [0, \frac{5}{4}] \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$, $t \mapsto S_1^t$ ist auch doppeltpunktfrei und auch die Projektion von $\tilde{w}$ mittels $p : \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^* / \langle S_1, S_2 \rangle$, wenn wir das Parameterintervall auf eines beschränken, das kürzer als eins ist. Demnach ist es möglich, die Wege $w_1 = p \circ \tilde{w}|_{[0, \frac{3}{4}]}$ und $w_2 = p \circ \tilde{w}|_{[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]}$ so durch reguläre Umgebungen zu überdecken, daß diese erst nach $\tilde{\mathbb{C}}^*$ geliftet und anschließend nach $\mathbb{C}$ injektiv eingebettet werden können. Mit diesen Definitionen ergibt sich:

$$\ell(w|_{[a, b]}) \stackrel{3.5(\text{vii})}{=} \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (\text{Cpl}(S_1^t)) \right| dt \stackrel{2.13}{=} \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (\text{Cpl}(\text{Exp}(t \cdot \text{Log}(S_1)))) \right| dt \stackrel{2.8/2.9}{=}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left| \frac{d}{dt} (\exp(t \cdot \text{Log}(S_1))) \right| dt \stackrel{2.8(\text{iii})}{=} \\
 &= |\text{Log}(S_1)| \cdot \int_a^b |\exp(t \cdot \Re(\text{Log}(S_1)) + i \cdot t \cdot \Im(\text{Log}(S_1)))| dt = \\
 (1) \quad &= |\text{Log}(S_1)| \cdot \int_a^b \exp(t \cdot \Re(\text{Log}(S_1))) \cdot |\exp(i \cdot t \cdot \Im(\text{Log}(S_1)))| dt \stackrel{2.8/2.9}{=} \\
 &= |\text{Log}(S_1)| \cdot \int_a^b \exp(t \cdot \ln(|\text{Cpl}(S_1)|)) dt = \\
 &= \frac{|\text{Log}(S_1)|}{\ln(|\text{Cpl}(S_1)|)} \cdot (\exp(b \cdot \ln(|\text{Cpl}(S_1)|)) - \exp(a \cdot \ln(|\text{Cpl}(S_1)|))) = \\
 &= \frac{|\text{Log}(S_1)|}{\ln(|\text{Cpl}(S_1)|)} \cdot (|\text{Cpl}(S_1)|^b - |\text{Cpl}(S_1)|^a).
 \end{aligned}$$

Damit lassen sich folgende Längenverhältnisse auswerten:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad q(w_1, \frac{(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}{(0, \frac{1}{4})}) &\stackrel{3.5(v)}{=} \frac{\ell(w|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]})}{\ell(w|_{[0, \frac{1}{4}]})} \stackrel{(1)}{=} \frac{|\text{Cpl}(S_1)|^{3/4} - |\text{Cpl}(S_1)|^{1/2}}{|\text{Cpl}(S_1)|^{1/4} - |\text{Cpl}(S_1)|^0} = |\text{Cpl}(S_1)|^{\frac{1}{2}} \\
 \text{und } q(w_2, \frac{(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})}{(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}) &\stackrel{3.5(v)}{=} \frac{\ell(w|_{[\frac{1}{2}, \frac{5}{4}]})}{\ell(w|_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]})} \stackrel{(1)}{=} \frac{|\text{Cpl}(S_1)|^{5/4} - |\text{Cpl}(S_1)|^1}{|\text{Cpl}(S_1)|^{3/4} - |\text{Cpl}(S_1)|^{1/2}} = |\text{Cpl}(S_1)|^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Da das Endsegment von w_2 zugleich das Anfangssegment von w_1 und umgekehrt ist, müßten die beiden bei (2) ausgerechneten Längenverhältnisse nach dem zuvor begründeten Kriterium zueinander invers sein. Tatsächlich ist jedoch ihr Produkt nicht $= 1$, sondern $|\text{Cpl}(S_1)|$, was nach Annahme $\neq 1$ sein sollte.

3.9 Bemerkung: Die Geometrie der Ähnlichkeitstori kann im allgemeinen nicht durch einen affinen Zusammenhang beschrieben werden.

Bei den gemäß 2.4 in Standarddarstellung gegebenen euklidischen Ähnlichkeitstori existiert freilich stets ein mit der Geometrie verträglicher affiner Zusammenhang: Der kanonische auf $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ gegebene affine Zusammenhang ist invariant gegenüber den Translationen und ist damit auch auf jenen nach 2.4 als Orbitraum definierten Tori erklärt. Andererseits beschreibt dieser affine Zusammenhang die übliche euklidische Geometrie, die ja nach 3.2 im wesentlichen auch die Geometrie der euklidischen Ähnlichkeitstori ist. Daß bei den gemäß 2.15 in Standarddarstellung gegebenen echten Ähnlichkeitstori die Dinge anders liegen, soll das folgende Beispiel zeigen:

Wir betrachten $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^* / \langle (2, 0), (1, 2\pi) \rangle)$. Dieses M ist strukturgleich zu $\mathbb{C}^* / \langle \ell_2 \rangle$, wobei ℓ_2 die Streckabbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto 2 \cdot z$ meint. D.h. dieser Ähnlichkeitstorus gestattet eine, (wenn auch nicht universelle) Überlagerung mit der gelochten Ebene zu identifizieren. Ein affiner Zusammenhang von M würde in dieser Ebene einen affinen Zusammenhang ergeben, der einerseits die Geometrie von M beschreiben und andererseits invariant gegenüber eine Streckung um zwei sein müßte. Damit müßte dieser Zusammenhang erfüllen, daß die von ihm definierte Parallelverschiebung eines Tangentialvektors längs jeder Kurve mit dem durch die Geometrie definierten Parallelverschiebungsbegriff zusammenfällt. Dies ist für uns eine Forderung, die bei einer (im Rahmen dieser Dissertation freilich nirgends erfolgten) Definition dieses Verträglichkeitsbegriffs erhoben bzw.

impliziert sein müßte. Da nach 3.2 die Geometrie der Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten in jeder Kartenumgebung praktisch die übliche euklidische Geometrie ist (modulo einer genauen Präzisierung der Einheit eines Längenmaßstabes), ist auch der Parallelitätsbegriff der Ähnlichkeitsgeometrie der der euklidischen Geometrie. Falls $w : [a, b] \rightarrow M$ innerhalb der Koordinatenumgebung U einer Karte (U, ϕ) verbleibt, ist eine Schar auf dem Träger von w aufgepflanzter Tangentialvektoren $(v_{w(t)})_{t \in [a, b]}$ genau dann invariant gegenüber Parallelverschiebung längs w , wenn $d\phi(v_{w(t)})$ (bei kanonischer Identifikation der Tangentialräume von $\mathbb{C}$) konstant ist. Dies gilt auch für die gelochte Ebene, die wir als Überlagerung des gelochten M hier erhalten haben. Geht v_2 durch Parallelverschiebung längs einer beliebigen $1 \in \mathbb{C}^*$ und $2 \in \mathbb{C}^*$ verbindenden Kurve aus v_1 hervor (die Indizes der Tangentialvektoren bezeichnen ihre Fußpunkte), so erhalten wir bei kanonischer Identifikation der Tangentialräume von $\mathbb{C}^*$ die Beziehung $v_1 = v_2$. Im Sinne von $M = \mathbb{C}^*/\langle \ell_2 \rangle$, bei dem v_1 und v_2 dank der Identifikation ihrer Fußpunkte in demselben Tangentialraum liegen, gilt aber keineswegs " $v_1 = v_2$ ", sondern vielmehr $v_1 = 2 \cdot v_2$. Dies ist jedoch kein Widerspruch, sondern ein für eine echte Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit normaler Vergrößerungseffekt, wie wir sie im Verlaufe dieser Arbeit mit dem in §B.2 definierten Begriffs des Vergrößerungsfaktors systematisch zu beschreiben versuchen. Man rechnet leicht nach (benutze etwa die in [Mil].II.8.2 genannten Beziehungen), daß der in $\mathbb{C}^*$ durch das Verschwinden aller Christoffelsymbole $\Gamma_{i,j}^k$ gegebene affine Zusammenhang der einzige ist, der als Parallelverschiebungsbegriff den durch die euklidische Geometrie induzierten Begriff ergeben würde. Dies ist zugleich der kanonische für $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ gegebene affine Zusammenhang. Dies ist jedoch kein affiner Zusammenhang in $\mathbb{C}^*/\langle \ell_2 \rangle$. Denn dann müßte nach dem Prinzip der Invarianz gegenüber Kartenwechsel für jedes in einer Umgebung von 1 definierte Vektorfeld V und für jeden Tangentialvektor v_1 zum Fußpunkt 1 die Beziehung

$$2 \cdot \nabla_{v_1}(V) = \nabla_{v_2}(d\ell_2(V))$$

gelten. Beim Auswerten dieser Beziehung entsteht jedoch auf der rechten Seite immer ein Faktor 2 mehr als auf der linken Seite, wenn ∇ (vgl. [Mil].II.§8(6)) derjenige affine Zusammenhang ist, der durch das Verschwinden der Christoffelsymbole, also durch die Formel $\nabla_{\sum_i x^i \partial_i}(\sum_j y^j \partial_j) = \sum_{i,j} (x^i \cdot \partial_i(y^j)) \cdot \partial_j$ gegeben ist.

§4: Die Topologie der geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur

Das Ergebnis dieses Paragraphen ist:

4.1 Satz: *Alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur sind Tori.*

Für diesen Satz geben wir nachfolgend einmal die Skizze eines elementargeometrischen Beweises (4.2) und zum anderen einen auf der Gauß-Bonnet-Formel fußenden vollständigen Beweis, der im Rahmen dieser Arbeit leichter dargestellt werden kann (4.4/§5).

4.2 Skizze eines elementargeometrischen Beweises von 4.1:

Man führe zunächst eine der Ähnlichkeitsgeometrie angepaßte Triangulation auf der

Mannigfaltigkeit M ein, d.h. man fixiere ein Netz von Punkten, verbinde geeignete Paare davon durch untereinander nicht-schneidende Strecken (d.h. Geradensegmenten) derart, daß das System von Punkten und Strecken die Mannigfaltigkeit in Komponenten zerlegt, von denen eine jede noch durch eine Karte auf ein Dreieck in der Ebene eingebettet wird. Sei e die Eckenzahl, k die Streckenzahl ("Kantenzahl") und f die Flächenzahl dieser Triangulation, sodaß nach der Theorie der Eulercharakteristik gilt:

$$(1) \quad \chi(M) = e - k + f.$$

Da jede Kante im Rand zweier Dreiecke auftritt und jedes Dreieck drei Kanten hat, gilt $3 \cdot f = 2 \cdot k$. Wenn wir um jeden Eckpunkt der Triangulation einen Vollwinkel legen, erhalten wir die Gesamtwinkelsumme $360^\circ \cdot e$. Andererseits erhalten wir dieselbe Gesamtwinkelsumme, wenn wir die Winkelsumme jedes Dreiecks bilden und addieren. Da die Dreiecke alle nach C einbettbar waren, entsteht so $180^\circ \cdot f$. Setzen wir diese Beziehungen in die Gleichung (1) ein, ergibt sich $\chi(M) = 0$, d.h. daß M ein Torus sein muß. $\square$

4.3 Bemerkung: Die Grundidee des Beweises, den wir im folgenden für den Satz 4.1 vorstellen, ist dieselbe wie bei der Skizze von eben. Wir beabsichtigen lediglich, uns Definition und Wohldefiniertheitsüberlegungen für einen Algorithmus zum Beweis der Existenz der Ähnlichkeitstriangulationen zu sparen und stattdessen mit entsprechenden bekannten Ergebnissen aus der Theorie der differenzierbaren Mannigfaltigkeiten zu operieren. Bei Berufung auf solche Ergebnisse erhalten wir freilich solche Triangulationen, bei denen wir nur unterstellen dürfen, daß die Kanten unserer Dreiecke differenzierbare Kurven sind, nicht aber, daß sie Strecken sind. Von daher können wir nicht mehr, wie in der Beweisskizze eben, einfach mit dem Satz über die Winkelsumme des Dreiecks weiterschließen, sondern wir müssen mit komplizierteren Beziehungen argumentieren, die auch das Verhalten der gekrümmten Randsegmente der Dreiecke mit berücksichtigen. Solche Beziehungen können wir entweder als Satz vom Umlaufwinkel eines Zellrandes interpretieren (B.3.12) oder (5.1(1)/5.3) als Gauß-Bonnet-Formel.

Für riemannsche Mannigfaltigkeiten ist die Gauß-Bonnet-Formel ja bekannt. Da wir auf Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten aber keine riemannsche Metrik zur Verfügung haben (und dies nach Einl.0.3(1.Fall) auch nicht zu erwarten ist), ist die Übertragung der Gauß-Bonnet-Formel auf Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten eine von uns im nächsten Paragraphen zu leistende Aufgabe. Wir erwähnen trotzdem bereits an dieser Stelle:

4.4 Beweis von Satz 4.1: Wir wenden die Gauß-Bonnet-Formel 5.1(1) (bewiesen laut 5.10) auf das Gebiet $R = M$ an. Da M keine Ränder hat, verschwinden Term 1 und Term 3. Da auch K nach 5.5 verschwindet, entsteht so die Aussage $\chi(M) = 0$. Da M eine geschlossene orientierbare Fläche ist, folgt mit dem Hauptsatz der Flächentopologie, daß M ein Torus sein muß. $\square$

§5: Das Gauß-Bonnet-Theorem für zweidimensionale Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten

5.1 Zielbestimmung: In der Differentialgeometrie zweidimensionaler riemannscher

Mannigfaltigkeiten wird folgende Formel gezeigt, die mit dem Namen Gauß-Bonnet verknüpft ist ([Crm].4.5)

$$(1) \quad \underbrace{\int_{\partial R} k_g(s) ds}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\iint_R K d\sigma}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \theta_j}_{\text{Term 3}} = 2\pi \cdot \chi(R)$$

Dabei bedeuten:

- (i) R ist ein Gebiet aus einer zweidimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M , dessen Rand aus einer endlichen Anzahl geschlossener stückweise differenzierbarer nicht-schneidender Kurven besteht.
- (ii) χ bezeichnet die Euler'sche Charakteristik.
- (iii) $\iint \dots d\sigma$ ist das Integral einer skalaren auf R definierten Funktion nach dem durch die riemannsche Geometrie von M induzierten Flächenmaß.
- (iv) $\int \dots ds$ ist das Integral einer zumindest auf den Kurven, über die integriert wird, definierten skalaren Funktion nach der durch die riemannsche Geometrie von M induzierten Weglänge.
- (v) $\int_{\partial R} \dots$ meint eine Summe über die Integrale aller differenzierbaren parametrisierten Randkurven. Die Parametrisierung einer Randkurve w_i wird dabei so orientiert, daß für jede Stelle t , die im Inneren des Parameterintervalls von w_i liegt und jeden auf die Fläche R zeigenden Vektor $v_{w(t)}$ der Winkel $\angle(w'(t), v_{w(t)}) > 0$ ist.
- (vi) θ_j sind die an den Bruchstellen der Differentiation der Randkurven von R entstehenden Winkel. Präzise: Seien (anders als in (v)) $w_1, \dots, w_k$ die geschlossenen (aber dafür nur stückweise differenzierbaren) Randwege von R , orientiert wie bei (v). Sei t Bruchstelle der Differentiation von w_i . Dann wird $\angle(w'_i(t^-), w'_i(t^+))$ im Sinne der Definition von 3.5(iii) nach entsprechender Umnummerierung der Indizes als ein Summand θ_j in die Summe von Term 3 aufgenommen.
- (vii) K meint die Gauß'sche Krümmung der riemannschen Mannigfaltigkeit M .
- (viii) k_g ist die geodätische Krümmung der jeweiligen Randkurve, definiert etwa wie [Crm].4.4(Def.10).

Ziel dieses Paragraphen ist es, die Formel (1) auch für zweidimensionale Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten nachzuweisen. Dies erfordert, daß durch die weiteren Ausführungen in diesem Kapitel die Definitionen (iii), (iv), (vii) und (viii), die auf dem lokalen Skalarprodukt riemannscher Mannigfaltigkeiten unmittelbar aufbauen, auf Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten fortgesetzt werden und daß Analoges mit den Beweisen geschieht.

5.2 Man bemerke jedoch, daß die stückweise differenzierbare Randkurve eines Gebietes auch Spitzenpunkte als Bruchstellen der Differentiation enthalten kann, d.h. Punkte an denen die Tangentialvektoren $v'(t^-) \nparallel v'(t^+)$ sind, d.h. in die genau entgegengesetzte Richtung zeigen. In dem Fall ist $\angle(v'(t^-), v'(t^+))$ nach 3.5(iii) nicht definiert. In B.3.3(ii) werden wir daher noch aufzeigen, wie sich auch dieser Fall noch behandeln läßt. Allerdings möchten wir schon an der Stelle darauf hinweisen, daß die von [Crm] für diesen Fall angegebene Definition [Crm].(Fig.4-26) so leider auch nicht korrekt ist, freilich ohne daß diese Unkorrektheit prinzipielle Bedeutung hätte oder für uns deshalb ein Anlaß wäre, die im [Crm] beschriebenen Ergebnisse in Zweifel zu ziehen. Die Grundidee

unserer Definition B.3.3(ii) und der der Definition [Crm].(Fig-26) ist dieselbe: Hat die Kurve w an der Stelle t eine Spitze, so setze man $|\angle(w'(t^-), w'(t^+))| = \pi$ und orientiere sich bei der Vorzeichenwahl an den Vorzeichen der Winkelwerte, die entstehen, wenn man w durch eine Isotopie in der Umgebung von $w(t)$ durch eine Kurve ersetzt, die anstelle einer Spitze nur eine normale Stelle der Nicht-Differenzierbarkeit hat.

5.3 Gauß-Bonnet-Formel für Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten: Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur und R ein Gebiet wie 5.1(i) dar- aus. Dieses Gebiet sei in die Integrationsbereiche $B_1, \dots, B_N$ zerlegt, die jeweils durch eine Karte (U_i, ϕ_i) überdeckt werden. Entsprechend sei ∂R in die Bereiche $b_1, \dots, b_n$ zerlegt, die durch die Karten (V_i, ψ_i) überdeckt werden. Gemäß dem Prinzip 3.2 kann durch die Koordinatenabbildungen ϕ_i und ψ_j auf U_i bzw. V_j die Struktur einer riemann- schen Mannigfaltigkeit mit euklidischer Geometrie eingeführt werden. Dann gilt:

$$(1) \quad \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \int_{b_j} k_g(s) ds \right)}_{\text{Term 1}} + \underbrace{\left(\sum_{j=1}^N \iint_{B_j} K d\sigma \right)}_{\text{Term 2}} + \underbrace{\sum_{j=1}^p \theta_j}_{\text{Term 3}} = 2\pi \cdot \chi(R),$$

wobei die einzelnen Integrale entsprechend der Theorie der riemannschen Mannigfaltig- keiten unter Benutzung der durch die Koordinatenabbildungen ϕ_i bzw. ψ_j induzierten euklidischen Metrik ausgewertet werden.

Bei dem Beweis dieser Formel berufen wir uns im wesentlichen auf das, was im [Crm] ausgeführt ist. Die in den nachfolgenden Absätzen dargestellten Überlegungen verste- hen sich als Zusatzüberlegungen, die man noch anstellen muß, um die entsprechenden Aussagen, die im [Crm] nur für zweidimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten be- wiesen worden sind, auch auf Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten, bei denen nur eine lokale Einbettbarkeit gegeben ist, zu übertragen.

5.4 Bemerkung: Im [Crm] wird mit der Vorstellung von in den $\mathbb{R}^3$ eingebetteten zwei- dimensional riemannschen Mannigfaltigkeiten S gearbeitet. D.h. im [Crm] ist S stets als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ definiert, das lokale Skalarprodukt von S ist durch das euklidische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ definiert und für S sind (mindestens lokale) Normalenvektorfelder erklärt. Um dann mit den Definitionen aus [Crm] arbeiten zu können, bietet sich daher folgende Vorstellung an:

Sei (U, ϕ) eine Karte eines Ähnlichkeitsatlases von M . Wir betrachten die Einbettung $j : C \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x + i \cdot y) \mapsto (x, y, 0)$. Mit dieser Einbettung ergibt jede Koordinatenab- bildung eines Ähnlichkeitsatlases von S auch eine lokale Einbettung von M in den $\mathbb{R}^3$, die eine der im Sinne von 5.3 mit der Ähnlichkeitsgeometrie verträglichen euklidischen Geometrien induziert und gestattet, die Definitionen aus dem [Crm] zu benutzen. Diese Auffassung ist Grundlange der nachfolgenden Invarianzbeweise. Außerdem halten wir fest:

(1.) Das Normalenvektorfeld N , das in den aus [Crm] übernommenen Formeln auf- taucht, ist für die hier betrachteten Einbettungen stets das Einheitsvektorfeld in z - Richtung entsprechend [Crm].3.2(Expl.1).

(2.) $j \circ \phi$ ist gleichzeitig eine "orthogonale Parametrisierung" einer Umgebung aus M im Sinne des [Crm].2.5(Expl.3).

5.5 Lemma: Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur und (U, ϕ) eine Karte daraus. Entsprechend 5.3 wird $(U, \widetilde{A}_\phi^{\text{Iso}(\mathbb{C})})$ als $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeit aufgefaßt (vgl. 2.8(1)/1.7/2.2(ii)). Dann verschwindet die Gauß'sche Krümmung K von $(U, \widetilde{A}_\phi^{\text{Iso}(\mathbb{C})})$. Von daher ist der Term 2 in Formel 5.3(1) unabhängig von der Zerlegung und den überdeckenden Karten, denn er ist in jedem Fall gleich null.

Beweis: Unter Benutzung der bei 5.4 vorgestellten lokalen Einbettungen von M in den $\mathbb{R}^3$ folgt $K = 0$ aus [Crm].3.2(Def.6) mit [Crm].3.2(Expl.1).

5.6 Lemma: Seien (U, ϕ) und (U, ψ) zwei Karten einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit M und $w : [a, b] \rightarrow U$ ein Weg darin, der nach seiner Bogenlänge parametrisiert ist. Dann hängt $\int_w k_g(s) ds$ nicht von der Auswahl der überdeckenden Karte ab.

Beweis: Sei v ein Weg $v : [a, b] \rightarrow \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}^3\}$. Gemäß 5.4 werden die Integrale des Term 1 von 5.3(1) ausgewertet, indem die geodätische Krümmung k_g von Wegen wie v entsprechend [Crm] berechnet wird. Nach [Crm].4.4(Def.9), [Crm].4.4(Def.10) und [Crm].1.4 gilt:

$$(1) \quad \int_v k_g ds := \int_a^b \langle v''(t), N \times v'(t) \rangle dt.$$

Sei φ eine orientierungserhaltende euklidische Bewegung, die die (x, y) -Ebene des $\mathbb{R}^3$ in sich abbildet. Daß der Wert des Integrals (1) sich nicht ändert, wenn wir v durch $\varphi \circ v$ ersetzen, folgt aus der Invarianz von φ gegenüber dem Normalenvektorfeld N und der geometrischen Invarianz des Skalarprodukts. Daß sich das Integral aus Formel (1) auch nicht ändert, wenn wir v durch $\alpha \cdot v$ ersetzen (α sei ein Streckfaktor $\in \mathbb{R}_+$), ergibt sich durch elementares Nachrechnen. Man muß freilich beachten, daß dabei auch der Weg $\alpha \cdot v$ wieder nach Bogenlänge parametrisiert sein muß. Letzteres kann z.B. durch die Abbildung $[\alpha \cdot a, \alpha \cdot b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $s \rightarrow \alpha \cdot v(\frac{s}{\alpha})$ erreicht werden. Durch die beiden vorangehenden Überlegungen ist die Invarianz des Integrals aus (1) gegen alle möglichen Ähnlichkeitsabbildungen der (x, y) -Ebene in sich gezeigt. Nach Prinzip 3.2 reicht das, um auf die Invarianz der Summanden aus Term 1 der Formel 5.3(1) zu schließen. $\square$

5.7 Lemma: Der Term 1 der Formel 5.3(1) ist invariant gegenüber einer Änderung der Zerlegung oder der überdeckenden Karten.

Der Beweis ergibt sich, indem man gemäß einer Standardtechnik für Integrale zu zwei Zerlegungen die gemeinsame Verfeinerung betrachtet und sich auf das Ergebnis von 5.6 beruft. $\square$

5.8 Lemma: Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein Homöomorphismus auf eine semilineare Mannigfaltigkeit, der im Sinne von [Munk].II.8.1 differenzierbar ist; letzteres garantiert insbesondere, daß alle

Kanten differenzierbare Kurven sind. Darüberhinaus kann eine solche Triangulierung so gewählt werden, daß der Durchmesser des größten Dreiecks kleiner als ε bezüglich einer beliebigen mit der Topologie von M verträglichen Metrik wird.

Beweis: Abgesehen von der Behauptung betreffs des Durchmessers des größten Dreiecks ist dies ein Sonderfall der Aussage [Munk].II.10.6. Sei dann $f : K \rightarrow M$ eine Triangulation im Sinne von [Munk].II.8.3. Nach der Charakterisierung einer Abbildung f als Triangulation in dem hier gewünschten Sinne durch [Munk].II.8.4 gilt, daß f eine Triangulation bleibt, wenn wir K durch eine baryzentrische Unterteilung von sich ersetzen. Wenn bei einer Folge von baryzentrischen Unterteilungen der Durchmesser des größten durch f nach M eingebetteten Simplex in M nicht gegen 0 ginge, so könnten die Ableitungen von f in einem der Simplexe von K nicht beschränkt sein. $\square$

5.9 Lemma: Die Gauß-Bonnet-Formel 5.1(1) gilt für alle zwei-Zellen mit stückweise differenzierbarem Rand, die innerhalb einer Koordinatenumgebung einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit liegen.

Beweis: Da mit 5.4 die Einbettbarkeit einer Koordinatenumgebung einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit in den $\mathbb{R}^3$ gegeben ist, können wir uns hier auf [Crm].4.5 ("Lokales Gauß-Bonnet-Theorem") berufen.

5.10 Satz: Die Gauß-Bonnet-Formel 5.1(1) mit der Berechnungsvorschrift 5.3 gilt für alle zweidimensionalen Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten und alle Gebiete R daraus.

Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Beobachtung, daß [Crm].4.5 seinen Beweis des "globalen Gauß-Bonnet-Theorems" nur auf Voraussetzungen aufbaut, die in unserem Fall auch gegeben sind:

- (i) nämlich zum einen des Lokalen Gauß-Bonnet-Theorems (vgl. 5.9),
- (ii) und zum anderen der Existenz von Triangulationen, sodaß jedes Dreieck innerhalb des Gebiets einer orthogonalen Parametrisation liegt. Da die Koordinatenabbildungen von Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten mit der Interpretation von 5.4(2.) insbesondere die Voraussetzungen einer orthogonalen Parametrisation erfüllen, ist auch diese Voraussetzung nach 5.8 gegeben.

Daß im [Crm] von einer einheitlichen Einbettung der Flächen ausgegangen wird, während wir hier nach 5.3 nur die Einbettbarkeit einzelner Koordinatenumgebungen voraussetzen dürfen, spielt keine Rolle, da mit 5.5/5.7 alle Werte sämtlicher bei der Rechnung beteiligten Integrale nicht von der Einbettung abhängen. $\square$

Abschnitt B : Klassifikation der Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung

In diesem Abschnitt werden die im Sinne von A.2.4/A.2.15 in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori nach strukturerhaltender Homöomorphie klassifiziert. Zusammen mit Satz A.4.1 und den noch in Abschnitt D zu erzielenden Ergebnissen, daß jeder Ähnlichkeitstorus strukturerhaltend homöomorph zu einem in Standarddarstellung gegeben ist (D.5.2), erweist sich die in diesem Abschnitt abzuleitende Klassifikation jedoch letztlich als die Klassifikation aller geschlossenen orientierten Flächen mit Ähnlichkeitsstruktur.

§1: Die Holonomie

Ziel dieses Paragraphen ist, die bei der Standarddarstellung A.2.4/A.2.15 auftretenden Gruppen durch eine von der Darstellung einer Mannigfaltigkeit als Orbitraum unabhängige Definition als Strukturinvariante bis auf Konjugation durch die Strukturgruppe nachzuweisen.

1.1 Definition: Seien M und M' zwei (G, X) -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeiten und $w : [a, b] \rightarrow M$ und $v : [a, b] \rightarrow M'$ zwei Wege daraus. w und v heißen „geometrisch äquivalent“, falls die Eigenschaften (i) und (ii) erfüllt sind:

- (i) Für alle $t \in [a, b]$ existiert ein Keim ψ_t einer strukturerhaltenden Abbildung, sodaß $\psi_t(w(t)) = v(t)$ ist.
- (ii) Sei $U \overset{\text{offen}}{\subset} M$ und $\phi : U \rightarrow M'$ eine strukturerhaltende Abbildung, die den Keim ψ_t induziert. Dann existiert $\eta > 0$, sodaß für alle $s \in (t - \eta, t + \eta)$ auch die Keime ψ_s von ϕ induziert werden.

1.2 Definition: Seien M, M', w, v und die Schar $\{\psi_t \mid t \in [a, b]\}$ wie in 1.1. Dann sagen wir: „ ψ_b ist durch quasianalytische Fortsetzung von ψ_a längs w “ entstanden.

(Beachte, daß dieses Phänomen nicht zum ersten Mal in dieser Arbeit betrachtet wird; laut A.1.6(ii)/A.1.4 läßt sich jede Einschränkung einer Übersetzungsabbildung eines (G, X) -Atlases auf eine Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereichs quasianalytisch auf die gesamte Grundmannigfaltigkeit fortsetzen.)

1.3 Lemma: M sei eine (G, X) -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeit, $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg daraus und (U, ϕ) eine $w(a)$ überdeckende Karte. $\varepsilon > 0$ sei so gewählt, daß $w([a, a + \varepsilon]) \subset U$ gilt. Dann existiert genau ein zu w geometrisch äquivalenter Weg $v : [a, b] \rightarrow X$, sodaß $\phi \circ w(t) = v(t)$ für alle $t \in [a, a + \varepsilon]$ gilt.

(i) **Existenzbeweis:** Wir überdecken $w([a, b])$ durch Koordinatenumgebungen. Durch Weglassen überflüssiger Karten und eine neue Indizierung läßt sich erreichen, daß die

Überdeckung von w schließlich durch die Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \dots (U_n, \phi_n)$ gewährleistet ist, die die nachfolgenden Eigenschaften erfüllen:

(1.) Wenn wir mit (s_i, t_i) für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ jeweils eine Zusammenhangskomponente von $w^{-1}(U_i)$ auszeichnen, so gilt:

$$(1) \quad a = s_1 \leq s_2 < t_1 \leq s_3 < t_2 \leq s_4 \dots \\ \dots s_{n-2} < t_{n-3} \leq s_{n-1} < t_{n-2} \leq s_n < t_{n-1} \leq t_n = b,$$

(2.) $(U_1, \phi_1) = (U, \phi)$.

Gemäß A.1.6(2) entstehen bei der Überdeckung von $w([a, b])$ durch $U_1, \dots, U_n$ folgende Übersetzungsabbildungen:

$$\gamma_{i,i-1} := \phi_{i-1} \circ \phi_i^{-1}|_{\phi_i(U_i \cap U_{i-1})} \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, n\}.$$

Wegen der Quasianalytizität von G läßt sich jede dieser lokal definierten Übersetzungsabbildungen eindeutig zu einer Operation $g_{i,i-1}$ auf ganz X fortsetzen ($i \in \{2, 3, \dots, n\}$). Damit können wir für $t \in (s_i, t_i)$ den Keim ψ_t als Keim der Abbildung $g_{2,1} \circ g_{3,2} \circ \dots \circ g_{i-1,i-2} \circ g_{i,i-1} \circ \phi_i$ erklären. Da diese Definitionen auf den Überlappbereichen (s_i, t_{i-1}) übereinstimmen, werden so für alle $t \in [a, b]$ Keime erklärt, die der Eigenschaft 1.1(ii) genügen. Mit $v(t) := \psi_t(w(t))$ ist somit der gesuchte zu w geometrisch äquivalente Weg konstruiert. Da das so konstruierte v für $t \in (s_1, t_1)$ insbesondere $v(t) = \psi_t(w(t)) = \phi_1(w(t)) = \phi(w(t))$ erfüllt, ist damit die Existenzbehauptung dieses Lemmas gezeigt. $\square$

(ii) **Eindeutigkeitsbeweis:** Seien $\{\psi_t \mid t \in [a, b]\}$ und $\{\psi'_t \mid t \in [a, b]\}$ zwei Scharen von Keimen, sodaß sowohl $\psi_t(w(t))$, als auch $\psi'_t(w(t))$ alle in 1.1(ii) und den Voraussetzungen dieses Lemmas geforderten Eigenschaften erfüllen, aber $\psi_{t_0} \neq \psi'_{t_0}$ für ein $t_0 \in [a, b]$ ist. Von daher gilt insbesondere

$$(2) \quad \psi_t = \psi'_t \quad \text{für } t \in [a, a + \varepsilon].$$

Sei $s := \sup\{t \in [a, b] \mid \psi_r = \psi'_r \quad \forall r \in [a, t]\}$.

1. Fall $\psi_s = \psi'_s$. Da $\psi_{t_0} \neq \psi'_{t_0}$, muß $s < b$ sein. Wegen 1.1(ii) gilt dann jedoch $\psi_{s+\delta} = \psi'_{s-\delta}$ für hinreichend kleines δ , was der Supremumseigenschaft von s widerspricht.

2. Fall $\psi_s \neq \psi'_s$. Wegen (2) ist $s > a$. Seien (U, ϕ) und (U', ϕ') zwei den Punkt $w(s)$ überdeckende Karten, sodaß ϕ und ϕ' im Sinne von 1.1(ii) die Keime ψ_s und ψ'_s induzieren. Es entsteht die Übersetzungsabbildung $\gamma : \phi(U \cap U') \rightarrow X$, $\gamma = (\phi' \circ \phi^{-1})|_{\phi(U \cap U')}$. Für hinreichend kleines δ wird $w([s - \delta, s])$ sowohl durch U , als auch durch U' überdeckt. δ sei außerdem so klein gewählt, daß alle Keime ψ_r und ψ'_r für $r \in [s - \delta, s + \delta]$ durch ϕ bzw. ϕ' gemäß 1.1(ii) induziert werden. Da ja nach Konstruktion $\psi_{s-\delta} = \psi'_{s-\delta}$ sein muß, ist somit γ in einer Umgebung V des Punktes $\phi(w(s - \delta))$ die Identität. Da Id_V einerseits zur Abbildung γ und andererseits zu Id_X fortgesetzt werden kann, folgt mit der Quasianalytizität von V , daß $\gamma = \text{Id}$ ist. Somit ist auch $\phi = \phi'$ und $\psi_s = \psi'_s$, was der Annahme dieses 2. Falles widerspricht.

Die Annahme $\psi_{t_0} \neq \psi'_{t_0}$ konnte also in beiden Fällen zum Widerspruch geführt werden. $\square$

1.4 Korollar: Seien M, M' zwei (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeiten, $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg und ψ_a ein am Punkt $w(a)$ definierter Keim einer strukturerhaltenden Abbildung mit M' als Wertevorrat. Dann existiert höchstens eine quasianalytische Fortsetzung von ψ_a längs w zu einem Keim ψ_b ; eine solche Fortsetzung existiert mindestens in dem Fall, da M' die Grundmannigfaltigkeit X ist.

Beweis: Im Fall $X = M'$ ist dies nur eine Umformulierung der Aussage 1.3. Ist $X \neq M'$, so muß der Eindeutigkeitsbeweis von 1.3 nur ein wenig geändert werden, um auch in dieser allgemeinen Situation stichhaltig zu sein: In 1.3(2.Fall) treten anstelle von zwei Koordinatenabbildungen " ϕ " und " ϕ' " zwei strukturerhaltende Abbildungen $f : U \rightarrow M'$ und $f' : U' \rightarrow M'$ auf. Man wählt dann eine $w(s)$ umgebende Karte (U, ϕ) und betrachtet die in einer geeigneten Umgebung von $\phi(w(s))$ definierte Übersetzungsabbildung $\gamma = (\phi \circ f'^{-1} \circ f \circ \phi^{-1})|_{\dots}$. Mit diesem γ kann man analog wie in 1.3(2.Fall) argumentieren. $\square$

1.5 Die Idee des Holonomiebegriffs ist, daß es eigentlich möglich sein müßte, in einer (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeit aufgrund der Quasianalytizität von G die Koordinatenabbildungen quasianalytisch fortzusetzen. In der Tat gelingt nach 1.3 so eine Fortsetzung zunächst einmal längs jedes Weges, solange wir nicht erwarten, daß die Fortsetzung bei Doppelpunkten unbedingt eindeutig ist, und solange wir nicht erwarten, daß bei geschlossenen Wegen die Fortsetzung am End- und Anfangspunkt übereinstimmt. Vielmehr wird in der Holonomie gerade die Übersetzungsabbildung zwischen der Original-Koordinatenabbildung am Anfangspunkt eines geschlossenen Weges und der nach quasianalytischer Fortsetzung dieser Abbildung längs des Weges an nämlichen Punkt entstehenden Abbildung betrachtet. Wegen der Quasianalytizität von G entspricht dieser Übersetzungsabbildung eine auf ganz X definierte Operation $g \in G$, $g : X \rightarrow X$.

Die Holonomie ist in unserer Arbeit einer der Schlüsselbegriffe, zum einen, weil sie sich mit Hilfe der im 1.10(i) gezeigten Homotopieinvarianz zu einer Abbildung $\pi_1(M) \rightarrow G$ fortsetzen läßt, die zu einem strukturinvarianten Homomorphismus wird, zum andern, weil die wichtigsten geometrischen Begriffe zum Verständnis und zur geometrischen Charakterisierung der unterschiedlichen Ähnlichkeitsstrukturen, nämlich Umlaufwinkel und Vergrößerungsfaktor (siehe §2/§3) sich direkt aus der Holonomie ablesen lassen. (2.7/3.9/3.22(iii), siehe auch D.6.4).

1.6 Definition der Holonomie eines Weges w .

Sei M eine (G, X) -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeit, $w : [a, b] \rightarrow M$ ein geschlossener Weg daraus und (U, ϕ) eine $w(a)$ überdeckende Karte. ψ_a sei der von ϕ am Punkt $w(a)$ induzierte Keim einer strukturerhaltenden Abbildung, ψ_b entsteht daraus durch quasianalytische Fortsetzung längs w gemäß 1.4. $\psi_b \circ \psi_a^{-1}$ bildet dann den Keim einer strukturerhaltenden Abbildung $X \rightarrow X$, der wegen der Quasianalytizität von G eindeutig zu einer Operation $h \in G$ fortgesetzt werden kann. Als "Holonomie des Weges w " bezeichnen wir die durch diese Vorschrift dem Weg w und einer gewählten Anfangskarte

(U, ϕ) eindeutig zugeordnete Operation

$$\hat{h}_\phi(w) := h.$$

Ersetzen wir (U, ϕ) durch eine andere $w(a)$ überdeckende Karte (U', ϕ') , so erhalten wir

$$\hat{h}_{\phi'}(w) = g \circ h \circ g^{-1},$$

wobei g die quasianalytische Fortsetzung der durch $\phi' \circ \phi^{-1}$ beschriebenen Übersetzungsabbildung ist, bzw. der Restriktion jener Übersetzungsabbildung auf die $w(a)$ überdeckende Zusammenhangskomponente von $U \cap U'$.

Beweis der Eindeutigkeitsaussage. Mit $\{\psi'_t \mid t \in [a, b]\}$ bezeichnen wir die quasianalytische Fortsetzung der durch ϕ' induzierten Keime längs des Weges w . Da in einer hinreichend kleinen Umgebung von $w(a)$ die Beziehung $\phi' = \phi' \circ \phi^{-1} \circ \phi = g \circ \phi$ gilt und $\{g \circ \psi_t \mid t \in [a, b]\}$ eine allen Axiomen von 1.1 genügende quasianalytische Fortsetzung von ψ'_a liefert, folgt mit der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung laut 1.4, daß $\psi'_b = g \circ \psi_b$ gilt. $\hat{h}_{\phi'}(w)$ ergibt sich damit als quasianalytische Fortsetzung des Keims $\psi'_b \circ \psi'^{-1}_a = (g \circ \psi_b) \circ (g \circ \psi_a)^{-1} = g \circ \psi_b \circ \psi^{-1}_a \circ g^{-1}$. Letzterer Keim kann zu $g \circ h \circ g^{-1}$ fortgesetzt werden, wie in obiger Definition behauptet. $\square$

1.7 Definition: "Anfangspunktverschiebung"

Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg und $c \in (a, b)$. Wir sagen dann von einem Weg v , daß er "durch Anfangspunktverschiebung aus w hervorgegangen ist", wenn v sich wie folgt parametrisieren läßt:

$$v(t) = \begin{cases} w(t + c - a) & \text{für } t \in [a, a + b - c] \\ w(t + c - b) & \text{für } t \in [a + b - c, b] \end{cases}$$

1.8 Lemma: Die Holonomie eines Weges w ist bis auf Konjugation invariant gegenüber Anfangspunktverschiebung.

Beweis: Seien w und v wie in 1.7. Wir definieren jedoch noch $d := b + c - a$ und setzen w auf das Intervall $[b, d]$ fort durch $w(t) := w(t - (b - a))$. Mit dieser Fortsetzung von w vereinfacht sich die in 1.7 aufgestellte Beziehung zwischen v und w zu

$$v(t) = w(t + c - a) \quad \text{für } t \in [a, b].$$

Sei (U, ϕ) eine Kartenumgebung von $w(a)$. Die Schar von Keimen $\{\psi_t \mid t \in [a, d]\}$ entstehe, indem ψ_a durch ϕ am Punkt $w(a)$ induziert wird und dieser Keim gemäß 1.2/1.4 quasianalytisch auf $w|_{[a, d]}$ fortgesetzt wird. Die Karte (U', ϕ') sei als Umgebung von $w(c)$ so gewählt, daß ψ_c durch ϕ' induziert wird. Nach 1.6 ergibt sich somit für die Holonomie von $w = w|_{[a, b]}$:

$$(1) \quad \hat{h}_\phi(w) = \psi_b \circ \psi_a^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \psi_b = \hat{h}_\phi(w) \circ \psi_a$$

Damit entstehen durch quasianalytische Fortsetzung am Punkt $w(c) = w(d)$ sowohl ψ_d als Fortsetzung von ψ_b auf $w|_{[b, d]}$, als auch $\hat{h}_\phi(w) \circ \psi_c$ als Fortsetzung von $(\hat{h}_\phi(w)) \circ \psi_a$

auf $w|_{[b,d]} = w|_{[a,c]}$. Wegen (1) und der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung nach 1.4 gilt also:

$$\psi_d = (\hat{h}_\phi(w)) \circ \psi_c \quad \text{bzw.} \quad \psi_d \circ \psi_c^{-1} = \hat{h}_\phi(w)$$

Links des Gleichheitszeichens steht jedoch nach Definition von v und 1.6 genau die Holonomie $\hat{h}_{\phi'}(v)$. Da im allgemeinen die Karten (U, ϕ) und (U, ϕ') nicht als derartig zueinander passend vorausgesetzt werden dürfen, wie sie hier konstruiert wurden, behaupten wir in diesem Lemma unter Würdigung der Eindeutigkeitsaussagen von 1.6 nur die Invarianz "bis auf Konjugation". $\square$

1.9 Lemma: Seien $w_0, w_1 : [a, b] \rightarrow M$ zwei geschlossene Wege durch eine (G, X) -wohlstrukturierte Mannigfaltigkeit M , die relativ homotop zueinander sind, und (U, ϕ) eine $w_0(a)=w_1(a)$ umgebende Karte. Seien $\{(\psi_0)_t \mid a \leq t \leq b\}$ und $\{(\psi_1)_t \mid a \leq t \leq b\}$ diejenigen Scharen der Keime, die gemäß 1.2/1.4 durch quasianalytische Fortsetzung von ϕ längs w_0 bzw. w_1 entstanden sind. Dann ist $(\psi_0)_b = (\psi_1)_b$.

Beweis: Sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow M$ die relative Homotopie, die w_0 und w_1 miteinander verbindet. Insbesondere ist also $H(t, 0) = w_0(t)$, $H(t, 1) = w_1(t)$, $H(a, s) = H(b, s) = P = w_0(a) = w_1(a) = w_0(b) = w_1(b)$. Den durch $[a, b] \rightarrow M$, $t \mapsto H(t, s)$ definierten Weg bezeichnen wir als w_s . Die in 1.6 definierte Holonomie $\hat{h}_\phi(w_s)$ ist als $(\psi_s)_a \circ (\psi_s)_b^{-1}$ erklärt, wobei $(\psi_s)_a$ der von ϕ am Punkt P induzierte Keim ist und $(\psi_s)_b$ durch quasianalytische Fortsetzung von $(\psi_s)_a$ längs w_s entsteht. Seien $(U_1, \phi_1) := (U, \phi)$, sowie $(U_2, \phi_2), (U_3, \phi_3), \dots, (U_n, \phi_n)$ eine Überdeckung von $w_s([a, b])$, angeordnet wie in 1.3(i(1.)). Die Menge $H^{-1}(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ ist eine offene Umgebung von $[a, b] \times \{s\}$ in $[a, b] \times [0, 1]$. Daher existiert auch eine ε -Umgebung, sodaß

$$[a, b] \times \{s\} \subset [a, b] \times (s - \varepsilon, s + \varepsilon) \subset H^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^n U_i\right)$$

ist (bzw. eine einseitige ε -Umgebung für $s = 0$ und $s = 1$). Von daher werden die Wege w_r für $r \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ durch dieselben Umgebungen (U_i, ϕ_i) ($i \in \{1, \dots, n\}$) überdeckt wie w_s und durchlaufen dabei auch dieselben Zusammenhangskomponenten von $U_i \cap U_{i-1}$ ($i \in \{2, \dots, n\}$) wie w_s . Aus den beim Existenzbeweis 1.3(i) benutzten Konstruktionsschema ergibt sich so, daß der Keim $(\psi_r)_b$, der durch quasianalytische Fortsetzung von $(\psi_s)_a = (\psi_r)_a$ längs w_r entstanden ist, nicht von $r \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ abhängt. Da das kompakte Intervall $[0, 1]$ durch endlich viele solcher ε -Umgebungen überdeckt werden kann, gilt somit auch $(\psi_0)_b = (\psi_1)_b$. $\square$

Als unmittelbare Folgerung der Definition der Holonomie in 1.6 und des vorangegangenen Lemmas 1.9 ergibt sich die nachfolgende Aussage (i), die wiederum die Definition (ii) ermöglicht:

1.10 Lemma und Definition:

(i) Seien w_0, w_1 wie in Lemma 1.9. Dann haben w_0 und w_1 dieselbe Holonomie, d.h. für jede den gemeinsamen Anfangspunkt P von w_0 und w_1 überdeckende Karte (U, ϕ) ist $\hat{h}_\phi(w_0) = \hat{h}_\phi(w_1)$.

(ii) Sei $\alpha \in \pi_1(M)$, wobei M eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit ist und (U, ϕ) eine den Aufpunkt von $\pi_1(M)$ überdeckende Karte. Dann ist

$$\hbar_\phi(\alpha) := \hbar_\phi(w),$$

d.h. der Homotopieklasse α wird durch die Holonomie jedes ihrer Repräsentanten w auch eine Holonomie zugeordnet.

1.11 Lemma: Sei (U, ϕ) eine den Aufpunkt P der (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeit M überdeckende Karte. Dann ist die durch 1.6 und 1.10(ii) erklärte Abbildung $\hbar_\phi : \pi_1(M) \rightarrow G$ ein eindeutig definierter (Anti)Homomorphismus zwischen den beiden Gruppen, d.h. es gilt $\hbar_\phi(\alpha \cdot \beta) = \hbar_\phi(\alpha) \circ \hbar_\phi(\beta)$.

Beweis: $\alpha \in \pi_1(M)$ werde durch $u : [a, b] \rightarrow M$ und β durch $v : [b, c] \rightarrow M$ repräsentiert. $\psi_a = \omega_b$ sei der durch ϕ am Punkt $P = u(a) = v(b)$ induzierte Keim. Durch quasianalytische Fortsetzung von ψ_a längs u entstehe am Punkt P der Keim ψ_b , analog ergebe eine Fortsetzung von ω_b längs v den Keim ω_c am Punkt P . Wir betrachten dann folgende Schar von Keimen:

$$(1) \quad (\Psi_t)_{a \leq t \leq c} := \begin{cases} \psi_t & \text{für } a \leq t \leq b \\ \hbar_\phi(u) \circ \omega_t & \text{für } b \leq t \leq c \end{cases}$$

Benutzen wir, daß nach Definition der Holonomie $\hbar$ in 1.6

$\hbar_\phi(u) \circ \omega_b = (\psi_b \circ \psi_a^{-1}) \circ \psi_a = \psi_b \circ (\psi_a^{-1} \circ \psi_a) = \psi_b$ ist, so erkennen wir, daß die Definition (1) für den Scharparameter b konsistent ist. Mit der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung gemäß 1.4 ergibt sich so, daß die Schar $\{\Psi_t \mid a \leq t \leq c\}$ die quasianalytische Fortsetzung von ϕ längs $u \cdot v$ ist. Für die Holonomie ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \hbar_\phi(u \cdot v) &= \Psi_c \circ \Psi_a^{-1} = (\hbar_\phi(u) \circ \omega_c) \circ \psi_a^{-1} = \\ &= \hbar_\phi(u) \circ (\omega_c \circ \psi_a^{-1}) = \hbar_\phi(u) \circ (\omega_c \circ \omega_b^{-1}) = \hbar_\phi(u) \circ \hbar_\phi(v). \end{aligned}$$

1.12 Lemma: Sei M eine (G, X) -Mannigfaltigkeit. Je zwei der gemäß 1.10(ii) erklärten Holonomieabbildungen unterscheiden sich nur durch Konjugation der Bilder mit einem $g \in G$.

Beweis: Es ist von folgender Situation auszugehen: Seien $P, Q \in M$ und (U_1, ϕ_1) und (U_2, ϕ_2) seien P bzw. Q überdeckende Karten. Wir wählen einen Weg $v : [a, b] \rightarrow M$ mit $v(a) = Q$ und $v(b) = P$. Gemäß 1.10(ii) sind dann die Abbildungen $\hbar_{\phi_1} : \pi_1(M, P) \rightarrow G$ und $\hbar_{\phi_2} : \pi_1(M, Q) \rightarrow G$ definiert. η sei derjenige Homomorphismus von $\pi_1(M, P) \rightarrow \pi_1(M, Q)$, der erklärt wird, indem man der durch w repräsentierten Homotopieklasse die durch $v \cdot w \cdot v^{-1}$ repräsentierte zuordnet. Unter diesen Umständen ist zu zeigen, daß ein $g \in G$ existiert, sodaß für alle $\alpha \in \pi_1(M, \phi_1)$ gilt:

$$g \circ \hbar_{\phi_1}(\alpha) \circ g^{-1} = \hbar_{\phi_2}(\eta(\alpha)).$$

Wir wählen zu jedem $\alpha \in \pi_1(M, P)$ einen Repräsentanten $w_\alpha : [0, 1] \rightarrow M$. Diese Repräsentanten lassen sich ohne weiteres durch $v^{-1} \cdot v \cdot w_\alpha$ ersetzen (vgl. 3.14(i)). Die

Wege $v \cdot w_\alpha \cdot v^{-1}$ bilden dann einerseits genau jenes Repräsentantensystem von $\pi_1(M, Q)$, daß nach Definition des Homomorphismus η hier betrachtet werden muß und gehen andererseits aus dem für $\pi_1(M, P)$ gewählten Repräsentantensystem durch Anfangspunktverschiebung hervor. Im Zuge des Beweises von 1.8 wurde nachgerechnet, daß eine solche Anfangspunktverschiebung bei geeignet gewählten Anfangskarten die Holonomie nicht einmal verändern muß. Die Wahl einer in dem Sinne passenden Anfangskarte war dabei allein aufgrund der quasianalytischen Fortsetzung des Keims, der durch die Koordinatenabbildung am alten Anfangspunkt induziert wurde, längs des Wegsegments bis zum neuen Anfangspunkt möglich. Dieses Wegsegment ist jedoch in unserem Fall bei der hier gewählten Konstruktion das allen Repräsentanten $v^{-1} \cdot v \cdot w_\alpha$ gemeinsame Anfangssegment v . Für alle $\alpha \in \pi_1(M, P)$ gilt demnach $\tilde{h}_{\phi_1}(\alpha) = \tilde{h}_{\phi'_2}(\eta(\alpha))$, wenn wir die Koordinatenabbildung ϕ'_2 in der Umgebung von Q geeignet wählen. Ersetzen wir dann ϕ'_2 durch die gegebene Koordinatenabbildung ϕ_2 , so liegt nur die bereits in 1.6 betrachtete Situation vor. Bei einem solchen Wechsel der Koordinatenabbildung ändert sich die Holonomie um einen Konjugationsfaktor, der nur von der alten und neuen Koordinatenumgebung abhängt, wie bereits im Zuge des Eindeutigkeitsbeweises an jener Stelle gezeigt wurde. Damit ergibt sich die Behauptung dieses Lemmas. $\square$

1.13 Bemerkung: Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ und $\alpha \in \pi_1(M)$, wobei M eine (G, X) -Mannigfaltigkeit sei. Wird die Holonomie von w bzw. α nur in einem Zusammenhang betrachtet, bei dem die Anfangskarte ϕ keine Rolle spielt (z.B. weil nur eine konjugationsinvariante Größe von $\tilde{h}_\phi(w)$ bzw. $\tilde{h}_\phi(\alpha)$ gebildet werden soll), so schreiben wir anstelle von " $\tilde{h}_\phi(w)$ " oder " $\tilde{h}_\phi(\alpha)$ " nur " $\tilde{h}(w)$ " bzw. " $\tilde{h}(\alpha)$ ".

1.14 Definition: Sei M eine (G, X) -Mannigfaltigkeit und $\tilde{h} : \pi_1(M) \rightarrow G$ eine Holonomieabbildung gemäß 1.10(ii)/1.13. Dann ist mit $\text{Bild}(\tilde{h})$ eine Untergruppe von G ausgezeichnet, die wir "Holonomiegruppe von M " nennen. Die Holonomiegruppe einer (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeit M bezeichnen wir meistens nur durch " $\tilde{h}(M)$ ", was sich als Abkürzung für " $\tilde{h}(\pi_1(M))$ " versteht.

Bemerkung: Daß $\text{Bild}(\tilde{h})$ wirklich eine Gruppe ist, folgt aus 1.11. Gemäß 1.12 ist die Holonomiegruppe eindeutig bis auf Konjugation.

1.15 Lemma: Sei $f : M \rightarrow M'$ eine (G, X) -struktur erhaltende Abbildung zwischen zwei (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeiten. Als Holonomieabbildungen werden $\tilde{h} : \pi_1(M, P) \rightarrow G$ und $\tilde{h}' : \pi_1(M, Q) \rightarrow G$ betrachtet. P und Q seien durch die Karten (U, ϕ) bzw. (U', ϕ') überdeckt, wobei $f(P) = Q$ und $\phi = \phi' \circ f$ in einer Umgebung von P gelte. Dann ist für alle $\alpha \in \pi_1(M, P)$:

$$\tilde{h}(\alpha) = \tilde{h}'(f_\#(\alpha))$$

Beweis: Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Repräsentant von $\alpha \in \pi_1(M, P)$. Die Schar der Keime $\{\psi_t \mid t \in [a, b]\}$ entstehe aus der quasianalytischen Fortsetzung von ψ_a , welches durch ϕ' induziert werde, längs $f \circ w$. Nach 1.6 ergibt sich so $\tilde{h}'(f_\#(\alpha)) = \tilde{h}'(f \circ w) = \psi_b \circ \psi_a^{-1}$. Da andererseits auch die Menge $\{\psi_t \circ f \mid t \in [a, b]\}$ eine quasianalytische Fortsetzung

des von $\phi = \phi' \circ f$ am Punkt P induzierten Keimes längs w ist, entsteht als Holonomie $\hat{h}(\alpha) = \hat{h}(w) = (\psi_b \circ f_P) \circ (\psi_a \circ f_P)^{-1} = \psi_b \circ f_P \circ f_P^{-1} \circ \psi_a^{-1} = \psi_b \circ \psi_a^{-1} = \hat{h}(f_{\#}(\alpha))$. Dabei meint f_P den von f am Punkt P induzierten Keim. $\square$

1.16 Lemma: Die Holonomiegruppe und die Holonomieabbildung sind bis auf Konjugation eindeutig definierte Strukturinvarianten.

Beweis: Gemäß 1.14 reicht es, diese Behauptung für die Holonomieabbildung zu zeigen. Ist f ein strukturerhaltender Homöomorphismus, so ist $f_{\#}$ ein Isomorphismus. Die beim vorangegangenen Lemma 1.15 bewiesene Gleichung $\hat{h}(\alpha) = \hat{h}'(f_{\#}(\alpha))$ macht dann genau die Aussage, daß $f_{\#}$ die Holonomieabbildung übersetzt und daß somit (G, X) -Mannigfaltigkeiten der gleichen Strukturklasse nur Holonomieabbildungen haben können, die über die gleichen algebraischen Invarianten verfügen, insbesondere die gleichen Bildgruppen in G haben. Wenn wir dann freilich noch bedenken, daß die Voraussetzungen des vorangegangenen Lemmas noch eine Reihe von Normierungsvorschriften enthielten, die nicht Voraussetzungen allgemeiner Invarianzaussagen sein können, so müssen wir diese Aussage noch ein wenig relativieren. Da aber die induzierte Abbildung $f_{\#}$ durch f eindeutig bis auf Konjugation bestimmt ist und die Holonomie auch eindeutig bis auf Konjugation war (vgl. 1.12), bleibt die Aussage "Strukturinvariante bis auf Konjugation", wie in der Formulierung des Lemmas behauptet, bestehen. $\square$

1.17 Korollar und Definition: Als "Drehanteil" einer Operation aus $\text{Aut}(C)$ (Definition siehe A.2.2(1)) bezeichnen wir das Bild folgendes kanonischen Homomorphismus:

$$\text{Dr} : \text{Aut}(C) \rightarrow (C^*, \cdot) \quad , \quad (z \mapsto a \cdot z + b) \mapsto a.$$

Er ist für uns als Konjugationsinvariante vor allem im Zusammenhang mit 1.16 von Wichtigkeit.

1.18 Bemerkung zu dem Begriff "(Anti)Homomorphismus" aus 1.11.

In Lemma 1.11 hatten wir nachgewiesen, daß die Holonomieabbildung $\hat{h} : \pi_1(M) \rightarrow G$ der Gleichung $\hat{h}(\alpha \cdot \beta) = \hat{h}(\alpha) \circ \hat{h}(\beta)$ für alle $\alpha, \beta \in \pi_1(M)$ genügt. Man sollte sich bewußt machen, daß dies in Wahrheit eine Reihenfolgeumkehr bedeutet. Schließlich meint " $\alpha \cdot \beta$ ", daß zunächst ein α repräsentierender Weg und anschließend ein β repräsentierender durchlaufen werden muß, während " $\hat{h}(\alpha) \circ \hat{h}(\beta)$ " eine Abbildung beschreibt, die entsteht, indem zuerst $\hat{h}(\beta)$ und anschließend $\hat{h}(\alpha)$ angewandt wird. Aus diesem Grund neigen einige Autoren dazu, in so einem Fall nicht von einem Homomorphismus, sondern von einem Antihomomorphismus zu reden, bzw. würden durch Verkettung mit einer Inversion ($x \mapsto x^{-1}$) eine solche Abbildung von vornherein anders definieren. Wir fassen $\hat{h}$, so wie wir es hier definiert haben, als Homomorphismus auf und werden es in Zukunft auch so ohne den Zusatz "(Anti)" bezeichnen.

Dieselbe Konvention liegt dem [StZ] zugrunde, wenn dort ein kanonischer Homomorphismus zwischen der Fundamentalgruppe und der Deckbewegungsgruppe konstruiert wird. Insofern entstehen auch keine Konsistenzschwierigkeiten, wenn wir in C.2.3(ii) die Definition dieses Homomorphismus aus dem [StZ] hier übernehmen.

1.19 Lemma: Sei X eine einfach zusammenhängende Grundmannigfaltigkeit, G eine Transformationsgruppe von X und $H \subset G$ eine eigentlich diskontinuierlich und frei operierende Untergruppe von G und $q: X \rightarrow X/H$ die kanonische Projektion. Gemäß A.2.3 kann X/H dann als (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden. Dabei bietet es sich (konsistent auch zu unseren Definitionen A.2.17(ii)/A.2.11(i)) an, die universelle Überlagerung $\tilde{X}/H$ mit X zu identifizieren und q mit der Überlagerungsprojektion.

- (i) Sei $P \in X$ und U eine Umgebung von P , die zugleich ein Injektivitätsbereich von q ist. $w: [a, b] \rightarrow X$ sei ein Weg mit $w(a) = P$ und $w(b) = Q$, wobei Q aus dem Orbit von P unter H ist. Dann ist $\tilde{h}_{(q_U)^{-1}}(q \circ w)$ jene nach Voraussetzung eindeutige Operation von H , die P auf Q abbildet.
- (ii) Mit diesen Identifikationen und den Normierungen (i) wird H gleichzeitig zur Deckbewegungsgruppe und zur Holonomiegruppe.

Beweis von (i): Der Weg w ist ein zu $q \circ w$ geometrisch äquivalenter Weg und zwar zugleich der, den wir nach 1.6 konstruieren müssen, um $\tilde{h}_{(q_U)^{-1}}(q \circ w)$ ausrechnen zu können. Außerdem ergibt sich, daß, wenn V ein Injektivitätsbereich von q und zugleich eine Umgebung von Q ist, daß dann $(q_V)^{-1}$ als quasianalytische Fortsetzung von $(q_U)^{-1}$ längs $q \circ w$ entsteht. Folglich ergibt die Definition 1.6, daß $\tilde{h}_{(q_U)^{-1}}(q \circ w) = (q_V)^{-1} \circ (q_U)^{-1} = (q_V)^{-1} \circ (q_U)$ ist. Demnach ist jene Operation der Holonomiegruppe diejenige Operation von H , die P auf Q abbildet. Und da H frei operieren sollte, ist $\tilde{h}_{(q_U)^{-1}}(q \circ w)$ dadurch eindeutig bestimmt. $\square$

1.20 Definition: Als "Gitter" bezeichnen wir eine von zwei linear unabhängigen Translationen erzeugte Untergruppe von $\text{Iso}(\mathbb{C})$ (vgl. A.2.2(2)).

1.21 Erster Klassifikationssatz:

Die entsprechend A.2.4 durch ihre Standarddarstellung $\mathbb{C}/H$, wobei H gemäß 1.20 ein Gitter in $\mathbb{C}$ ist, werden durch die Zuordnung von H zu seiner Konjugationsklasse in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ klassifiziert.

Beweis: Nach 1.19(ii) ist H zugleich die Holonomiegruppe unseres Ähnlichkeitstorus und nach 1.16 damit eine Konjugationsinvariante in der Strukturgruppe $\text{Aut}(\mathbb{C})$. Damit können $\mathbb{C}/H_1$ und $\mathbb{C}/H_2$ nicht strukturgleich sein, wenn H_1 nicht in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ zu H_2 konjugiert ist. Existiert umgekehrt $g \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ sodaß $g \cdot H_1 \cdot g^{-1} = H_2$ ist, so induziert die Abbildung $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ einen strukturerhaltenden Homöomorphismus $\mathbb{C}/H_1 \rightarrow \mathbb{C}/H_2$.

1.22 Bemerkung: Bei den in Standarddarstellung A.2.15 gegebenen echten Ähnlichkeitstori ist die Situation komplizierter. Es ist zwar als Folge von 1.19(ii)/1.16 noch möglich, mit analogen Argumenten wie eben in 1.21 die bei der Standarddarstellung der echten Ähnlichkeitstori implizit zu betrachtenden $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Tori $\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle$ durch die Konjugationsklassen der dabei auftretenden Gruppen $\langle S_1, S_2 \rangle$ zu unterscheiden. Da $\tilde{C}^*$ abelsch ist und die Konjugationklassen folglich einelementig, erhalten wir sogar eine Klassifikation dieser $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Tori durch die Gruppen $\langle S_1, S_2 \rangle$ selber. Allerdings ist es uns vorerst nicht möglich, daraus auf eine explizite Klassifikation der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Tori $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle)$ zu schließen. Betrachten wir z.B. die Tori $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/(\langle \frac{9}{4}, 0 \rangle, (1, \alpha)))$ und

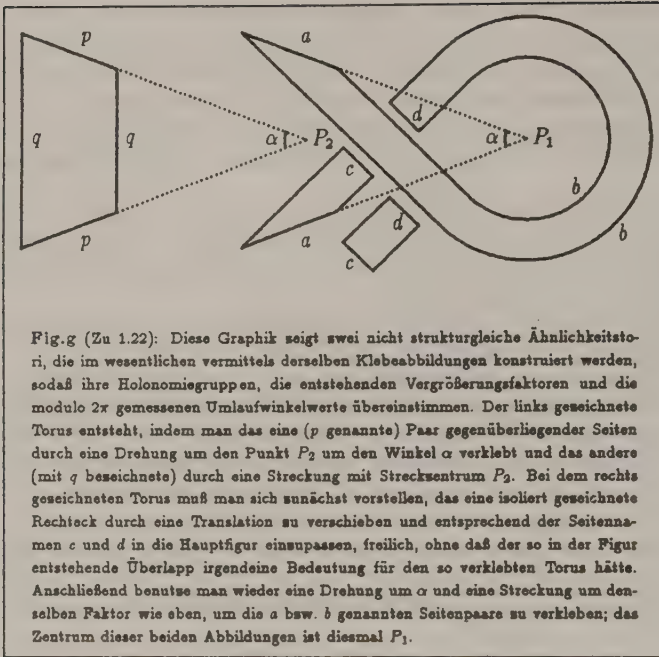


Fig.g (Zu 1.22): Diese Graphik zeigt zwei nicht strukturgleiche Ähnlichkeitstori, die im wesentlichen mittels derselben Klebeabbildungen konstruiert werden, sodaß ihre Holonomiegruppen, die entstehenden Vergrößerungsfaktoren und die modulo 2π gemessenen Umlaufwinkelwerte übereinstimmen. Der links gezeichnete Torus entsteht, indem man das eine (p genannte) Paar gegenüberliegender Seiten durch eine Drehung um den Punkt P_2 um den Winkel α verklebt und das andere (mit q bezeichnete) durch eine Streckung mit Streckzentrum P_2 . Bei dem rechts gezeichneten Torus muß man sich zunächst vorstellen, das eine isoliert gezeichnete Rechteck durch eine Translation zu verschieben und entsprechend der Seitennamen c und d in die Hauptfigur einzupassen, freilich, ohne daß der so in der Figur entstehende Überlapp irgendeine Bedeutung für den so verklebten Torus hätte. Anschließend benutzt man wieder eine Drehung um α und eine Streckung um denselben Faktor wie oben, um die a bzw. b genannten Seitenpaare zu verkleben; das Zentrum dieser beiden Abbildungen ist diesmal P_1 .

$\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^*/((\frac{9}{4}, 0), (1, \alpha + 2\pi)))$. Strukturgleiche Tori sind in Fig.g gezeichnet. Als Holonomiegruppen dieser Tori, die nach 1.14 aus Operationen $\in \text{Aut}(\mathbb{C})$ bestehen müssen, erhalten wir dann (vgl. 1.23) in beiden Fällen die von den Abbildungen $z \mapsto \frac{9}{4} \cdot z$ und $z \mapsto \exp(i \cdot \alpha) \cdot z$ erzeugten Gruppen. Damit stimmen die Holonomiegruppen dieser beiden Tori überein, und wir haben vorerst kein Argument bei der Hand, um zu begründen, daß $\tilde{\mathbb{C}}^*/((\frac{9}{4}, 0), (1, \alpha))$ und $\tilde{\mathbb{C}}^*/((\frac{9}{4}, 0), (1, \alpha + 2\pi))$ auch dadurch nicht strukturgleich werden, daß wir die Karten (wie in A.2.15(1)) durch Cpl nach $\mathbb{C}$ hinein verlängern und sie dadurch zu $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Tori machen. Das ergibt sich erst durch die Betrachtung von Umlaufwinkeln in §3 mit dem zweiten Klassifikationssatz 3.24.

1.23 Lemma : Sei $M = \Gamma(\tilde{\mathbb{C}}^*/H)$ ein echter Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung gemäß A.2.15 und $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ der durch $\varphi(a) = (z \mapsto a \cdot z)$ gegebene Homomorphismus. Dann ist $\varphi(\text{Cpl}(H))$ eine Holonomiegruppe von M .

Beweis: Sei $P \in \tilde{\mathbb{C}}^*$ und U eine Umgebung von P , die zugleich ein Injektivitätsbereich von Cpl und von der kanonischen Projektion $q : \tilde{\mathbb{C}}^* \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*/H$ ist. $w : [a, b] \rightarrow X$ sei ein Weg mit $w(a) = P$ und $w(b) = Q$, wobei Q aus dem Orbit von P unter H ist. Da die Wege w , $q \circ w$ und $\text{Cpl} \circ w$ zueinander geometrisch äquivalent sind, ergibt die Definition der Holonomie in 1.6, daß $h_{\text{Cpl} \circ (q \circ w)}(q \circ w)$ eine $\text{Aut}(\mathbb{C})$ -Operation ist, die $\text{Cpl}(P)$ auf $\text{Cpl}(Q)$ abbildet. Außerdem ergibt der Vergleich dieser Wege, daß diese

Operation auf $\tilde{C}^*$ liftbar sein muß und damit eine Drehstreckung um den Nullpunkt. Dadurch ist $\hbar_{\text{Cpl}(\mathfrak{q}_U)^{-1}}(q \circ w)$ jedoch eindeutig bestimmt (vgl. 1.19(i)). $\square$

Indem wir die nach 1.16 konjugationsinvarianten Eigenschaften der durch 1.23/A.2.15 beschriebenen Gruppen $\varphi(\text{Cpl}(H))$ ermitteln und uns insbesondere vergegenwärtigen, daß zwei $\tilde{C}^*$ -Werte, die nicht reelle Potenz voneinander sein dürfen, nicht beide den Absolutbetrag ($|\text{Cpl}(\cdot)|$) eins haben können, erhalten wir folgende Aussage:

1.24 Korollar: Die Holonomiegruppe eines echten Ähnlichkeitstorus, der in Standarddarstellung gemäß A.2.15 gegeben ist, ist von zwei Elementen erzeugbar, für die gilt:

- (i) Das erste Erzeugende ist eine Drehstreckung oder eine reine Streckung mit einem von eins verschiedenen Streckfaktor.
- (ii) Das zweite Erzeugende ist eine Drehstreckung, eine reine Streckung oder eine reine Drehung, dessen Streckzentrum bzw. Drehpunkt mit dem der ersten Erzeugenden übereinstimmt. Das zweite Erzeugende kann auch trivial werden (vgl. 1.25).

1.25 Bemerkung und Beispiele:

- (i) Es gibt echte Ähnlichkeitstori, deren Holonomieabbildung nicht injektiv ist.
- (ii) Es existieren echte Ähnlichkeitstori, deren Holonomiegruppe nicht diskontinuierlich operiert.

Beweis durch Angabe der Beispiele:

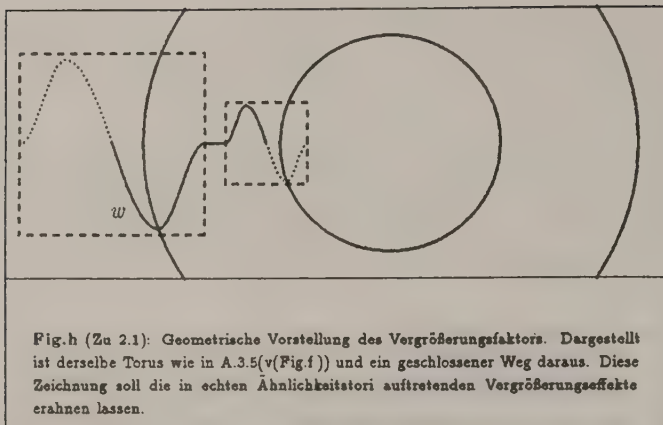
Zu (i): Gemäß A.2.15 ist der echte Ähnlichkeitstorus $\mathcal{M} := \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle(2,0), (1,2\pi)\rangle)$ definiert. Seine Holonomie kann nach 1.23 ausgerechnet werden. Da ja $\varphi(1, \pi)$ das neutrale Element ergibt, hat die Holonomiegruppe nur ein Erzeugendes, und $\hbar$ kann nicht injektiv sein.

Zu (ii): Analog wie bei (i) definieren wir mit Hilfe der Standarddarstellung $\mathcal{M} = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle(2,0), (1,1)\rangle)$. Die Holonomiegruppe dieses Torus enthält die von der Drehung $\varphi(1,1) : z \mapsto \exp(i) \cdot z$ erzeugte Untergruppe, die nicht diskontinuierlich operiert, da der Drehwinkel 1 in einem irrationalen Verhältnis zum Vollwinkel 2π steht. $\square$

§2: Vergrößerungsfaktoren

2.1 Zur Idee des Begriffs des Vergrößerungsfaktors:

Fig.h zeigt den Fundamentalbereich eines echten Ähnlichkeitstorus, der nach demselben Prinzip definiert ist wie der in Fig.c dargestellte: man muß sich vorstellen, das gestrichelt umrahmte Quadrat sei abwechselnd am äußeren und am inneren Rand des Kreistrings eingeklebt. Dieses Bild soll die Vergrößerungseffekte suggerieren, die einem in echten Ähnlichkeitstori begegnen. Der darin eingezeichnete Weg w ist ja in dem dargestellten Torus eine geschlossene Kurve, die ja im wesentlichen einem Meridian dieses Torus folgt und deren wellenförmige Abweichung von der geraden Meridianlinie durch eine Isotopie beseitigt werden könnte. Jedoch erscheint einem diese Kurve nach jedem Durchlauf (je nach Durchlaufsinn) vergrößert oder verkleinert.



Diese Vergrößerungseffekte haben wir bereits indirekt ausgenutzt, als wir in A.3.8 ein Kriterium entwickelt haben, Ähnlichkeitsstrukturen dadurch als echt nachzuweisen, daß bestimmte Längenverhältnisse verschieden ausfielen. In diesem Paragraphen gilt es nun, einen Faktor zu definieren, der sich jedem Weg als eine durch die Ähnlichkeitsgeometrie definierte den in Fig.h suggerierten Vergrößerungseffekt beschreibende Eigenschaft zuordnen läßt. Einen solchen Begriff gilt es, unabhängig davon zu erklären, wie gut sich ein Weg durch Koordinatenumgebungen überdecken läßt.

2.2 Lemma-Definition: Sei $w : [a, d] \rightarrow M$ ein Weg durch eine Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit wie in A.3.5(v). Dann kann das Längenverhältnis $q(w, \frac{(b_1, b_2)}{(c_1, c_2)})$ bereits dann erklärt werden, wenn lediglich $w([b_1, b_2])$ und $w([c_1, c_2])$ durch jeweils eine Koordinatenumgebung (aber nicht notwendig durch dieselbe) überdeckt werden können. Dieses Längenverhältnis ist durch die Ähnlichkeitsgeometrie von M , den Weg w und die Auswahl seiner Teilsegmente eindeutig determiniert.

Die Technik der Definition dabei ist folgende:

O.B.d.A. sei $b_i < c_i$ für $i \in \{1, 2\}$. Da der Verlauf von $w|_{[a, b_1]}$ und $w|_{[c_2, d]}$ für das hier zu definierende Längenverhältnis unerheblich sind, können wir o.B.d.A. $a = b_1$ und $c_2 = d$ annehmen. Wir führen dann einen analogen Weglaß- und Ummummerierungsprozess wie bei Beginn des Beweises von 1.3 durch und erhalten schließlich Karten $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2), \dots, (U_n, \phi_n)$, für die gilt:

- (i) dasselbe wie bei 1.3(i(1.)), wobei "d" hier an die Stelle "b" tritt,
- (ii) $w([b_1, b_2]) \subset U_1$,
- (iii) $w([c_1, c_2]) \subset U_n$.

Wir definieren dann weitere Zerlegungspunkte, und zwar wählen wir für jedes $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ Parameterwerte s'_i und t'_i , sodaß $s_i < s'_i < t'_{i-1} < t_{i-1}$. Damit ist nach Konstruktion jeweils mindestens eine Koordinatenumgebung vorhanden, sodaß durch

A.3.5(v) jedes der Längenverhältnisse auf der rechten Seite der nachfolgenden Definitionsgleichung definiert ist:

$$(1) \quad q(w, \frac{(b_1, b_2)}{(c_1, c_2)}) := q(w, \frac{(b_1, b_2)}{(s'_2, t'_1)}) \cdot q(w, \frac{(s'_2, t'_1)}{(s'_3, t'_2)}) \cdot \dots \\ \dots \cdot q(w, \frac{(s'_{n-1}, t'_{n-2})}{(s'_n, t'_{n-1})}) \cdot q(w, \frac{(s'_n, t'_{n-1})}{(c_1, c_2)})$$

Wohldefiniertheitsbeweis: Sei $s', t' \in [a, d]$, sodaß $w(\{s', t'\}) \subset U_i$. Dann gilt:

$$(2) \quad q(w, \frac{(s'_i, t'_{i-1})}{(s', t')}) \cdot q(w, \frac{(s', t')}{(s'_{i+1}, t'_i)}) = q(w, \frac{(s'_i, t'_{i-1})}{(s'_{i+1}, t'_i)}),$$

denn in U_i können jene drei Längenverhältnisse gemäß A.3.5(v) mit Hilfe eines mit der Ähnlichkeitsgeometrie verträglichen euklidischen Weglängenbegriffs durch Quotienten ausgedrückt werden; damit folgt die Formel (2) aus der Kürzungsregel. Gemäß A.3.5(v) sind die Längenverhältnisse aber unabhängig von der überdeckenden Koordinatenumgebung. Die Unabhängigkeit der Definitionsgleichung (1) von der gewählten Überdeckung und Zerlegung folgt dann, indem man die gemeinsame Verfeinerung zweier Zerlegungen betrachtet und sich auf die Aussagen der letzten beiden Sätze beruft. $\square$

2.3 Definition des Vergrößerungsfaktors:

Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein rektifizierbarer geschlossener Weg durch eine Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit und (U, ϕ) eine $w(a) = w(b)$ überdeckende Karte. $\varepsilon \in (a, b)$ sei so gewählt, daß $w|_{[a, a+\varepsilon]} \subset U$ gilt. Wir setzen die Funktion w von dem Intervall $[a, b]$ auf $[a, b + \varepsilon]$ fort, indem wir definieren:

$$w(t) := w(t - b + a) \quad \forall t \in [b, b + \varepsilon].$$

Dann erklären wir den Vergrößerungsfaktor ζ des Weges w durch

$$\zeta(w) := q(w, \frac{(b, b + \varepsilon)}{(a, a + \varepsilon)}).$$

Diese Definition erweist sich als unabhängig von ε .

2.4 Lemma: Sei M ein

- (i) echter bzw. (ii) euklidischer

Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung gemäß A.2.4/A.2.15. Dann gilt:

- (i): Es existiert ein Weg w aus M , dessen Vergrößerungsfaktor $\zeta(w) \neq 1$ ist, insbesondere gibt es in $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle)$ stets Wege mit $\zeta(w_1) = |\text{Cpl}(S_1)|$ und $\zeta(w_2) = |\text{Cpl}(S_2)|$.
(ii): Kein Weg aus M hat einen Vergrößerungsfaktor $\neq 1$.

Beweis von (i): Der Vergrößerungsfaktor des bereits in A.3.8 betrachteten Weges $p \circ \tilde{w}|_{[0,1]}$ kann mit den dort genannten Methoden ausgerechnet werden. Es entsteht (in

den Bezeichnungen von A.3.8) $\zeta(p \circ \tilde{w}|_{[0,1]}) = |\text{Cpl}(S_1)|$.

Zu (ii): Setzen wir in die Definition des Vergrößerungsfaktors 2.3 die Definition des Längenverhältnisses gemäß 2.2(1) und A.3.5(v) ein und benutzen dabei nur den auf M nach A.2.4/A.3.5(vii) einheitlich erklärbaren Weglängenbegriff ℓ , so entsteht ein vollständig kürzbares Produkt. $\square$

2.5 Bemerkung: Sind zwei Wege $w : [a, b] \rightarrow M$ und $v : [a, b] \rightarrow M'$ zueinander geometrisch äquivalent, so kann ja zu jedem Parameterwert $t \in [a, b]$ nach Definition 1.1 ein zu einer Umgebung von t gehörendes Segment von w durch eine in einer Umgebung definierte strukturerhaltende Abbildung auf das entsprechende Segment von v abgebildet werden. Nach Definition A.1.8 von "strukturerhaltend", können damit hinreichend kleine Wegsegmente von w und v stets auf die gleiche Art in die Grundmannigfaltigkeit eingebettet werden. Folglich stimmen diejenigen geometrischen Charakteristika von w und v überein, die man einem Weg dadurch zuordnen kann, daß man ihn auf beliebige Art segmentiert und den einzelnen Segmenen Charakteristika zuordnet, die gegen Kartenwechsel invariant sind. Entsprechend gilt:

- (i) Sind w und v geometrisch äquivalente geschlossene Wege, so stimmen die Vergrößerungsfaktoren $\zeta(w)$ und $\zeta(v)$ überein.
- (ii) Beachte bei (i), daß die Voraussetzung, daß w und v beide geschlossen sind, nicht trivial ist. Das geometrisch Äquivalente eines geschlossenen Weges, insbesondere auch das gemäß 1.3 konstruierte, muß nicht unbedingt geschlossen sein. Sei w ein geschlossener Weg und v ein geometrisch äquivalenter, nicht notwendig geschlossener Weg dazu. w sei gemäß Definition 2.3 von dem Parameterintervall $[a, b]$ auf $[a, b + \varepsilon]$ fortgesetzt, und v sei von daher auch für dieses Parameterintervall erklärt. Dann gilt aber noch

$$(1) \quad \zeta(w) = q\left(v, \frac{(b, b + \varepsilon)}{(a, a + \varepsilon)}\right)$$

gemäß dem oben erklärten Prinzip.

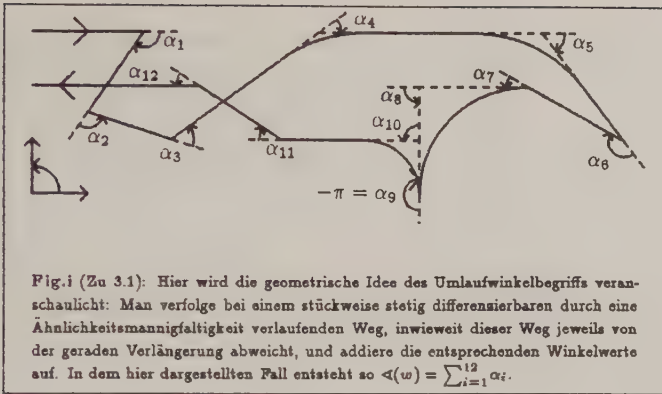
2.6 Lemma: Der Vergrößerungsfaktor ζ ist invariant gegenüber Anfangspunktverschiebung.

Beweis: Man mache sich klar, daß bei Ersetzung eines Weges durch einen durch Anfangspunktverschiebung daraus hervorgehenden beidesmal dieselben Faktoren entstehen, wenn man den Vergrößerungsfaktor ζ durch jenes Produkt darstellt, das entsteht, wenn man in die Definition 2.3 die Gleichung 2.2(1) einsetzt. $\square$

2.7 Lemma: Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein geschlossener Weg durch eine $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeit, so ist (Definitionen siehe 2.3/1.17/1.6)

$$\zeta(w) = |\text{Dr}(\hbar(w))|.$$

Beweis: Sei (U, ϕ) eine $w(a)$ überdeckende Karte und $v : [a, b] \rightarrow X$ der zu w und ϕ im Sinne von 1.3 eindeutig zu konstruierende geometrisch äquivalente Weg. Analog wie in



2.5(ii) werden w und v von $[a, b]$ auf $[a, b + \varepsilon]$ fortgesetzt. Sei ℓ die euklidische Weglänge in $\mathbb{C}$. Da $\mathbb{C}$ durch eine Karte überdeckbar ist, kann jenes Längenverhältnis bereits gemäß Definition A.3.5(v) als einfacher Quotient zweier Weglängen erklärt werden, d.h.

$$(1) \quad q(v, \frac{(b, b + \varepsilon)}{(a, a + \varepsilon)}) = \frac{\ell(v|_{[b, b + \varepsilon]})}{\ell(v|_{[a, a + \varepsilon]})}$$

Andererseits ist die Holonomie $h(w)$ nach 1.6 als $\psi_b \circ \psi_a^{-1}$ erklärt. Dabei ist ψ_a Keim der Koordinatenabbildung ϕ am Punkt $w(a)$ und ψ_b ist Keim einer Koordinatenabbildung, die den Punkt $w(a) = w(b)$ so auf den Punkt $v(b)$ abbildet, wie es der quasianalytischen Fortsetzung von ϕ längs w entspricht. Von daher ergibt $\psi_b \circ \psi_a^{-1}$ den Keim einer Übersetzungsabbildung γ , die ein den Parameterwert a umgebendes Segment des Weges v so auf ein den Punkt b umgebendes Segment des Weges $v|_{[a, b + \varepsilon]}$ abbildet, daß genau diejenigen Punkte von $v|_{[a, b + \varepsilon]}$, die zu denselben Punkten des in sich zurücklaufenden Weges $w|_{[a, b + \varepsilon]}$ gehören, aufeinander abgebildet werden. Der Streckfaktor von γ kann damit als

$$\left| \frac{\ell(v|_{[a, a + \varepsilon]})}{\ell(v|_{[b, b + \varepsilon]})} \right|$$

berechnet werden. Dies ergibt zusammen mit 2.5(1) und (1) die Behauptung dieses Lemmas. $\square$

Aus 2.7 erhält man analog zu 1.10:

2.8 Korollar: Der Vergrößerungsfaktor ist invariant gegenüber relativer Homotopie und kann von daher auch ganzen Homotopieklassen zugeordnet werden.

§3: Umlaufwinkel

3.1 Der Umlaufwinkel, dessen Idee in Fig.1 geschildert ist, wird ähnlich wie der im vorangehenden Paragraphen beschriebene Vergrößerungsfaktor zunächst als eine geometrische Eigenschaft jedes hinreichend glatten Weges definiert. Dieser Begriff wird für

uns vor allem dadurch interessant, daß es mit seiner Hilfe möglich ist, auch diejenigen Ähnlichkeitsstrukturen zu unterscheiden, die in §1 (vgl. insbesondere 1.22) mit Hilfe der Holonomie noch nicht klassifiziert werden konnten. Um jedoch Beispiele wie das in 1.22(Fig.g) gezeichnete noch behandeln zu können, müssen wir auch von dem Umlaufwinkelbegriff Homotopieinvarianzen zeigen und ihn ganzen Homotopieklassen zuordnen können. Dies ist zwar relativ einfach zu machen, solange wir nur modulo 2π rechnen. Das können wir uns jedoch gerade dann nicht leisten, wenn wir Tori wie die in 1.22(Fig.g) dargestellten unterscheiden wollen. Andererseits müssen wir anerkennen, daß es nun einmal umlaufwinkelverändernde Homotopien gibt, wie z.B. die in Fig.j gezeichnete. Allerdings stellt sich heraus, daß die in jener Figur gezeichnete Homotopie, die die Anzahl der Doppelpunkte eines Weges verändert, im wesentlichen die einzige Möglichkeit einer umlaufwinkelverändernden Homotopie ist. Von daher wird es sich als möglich erweisen, anhand des Doppelpunktverhaltens diejenigen Repräsentanten, die für die Umlaufwinkelmessung der durch sie vertretenen Homotopieklasse wesentlich sind, von den anderen zu unterscheiden. Auf dieser Grundlage können wir dann auch ganzen Homotopieklassen "absolute" (d.h. nicht nur modulo 2π bestimmte) Umlaufwinkelwerte zuordnen und damit auch diejenigen echten Ähnlichkeitstori klassifizieren, bei denen das in §1 mit Hilfe des Holonomiebegriffs noch nicht gelungen ist.

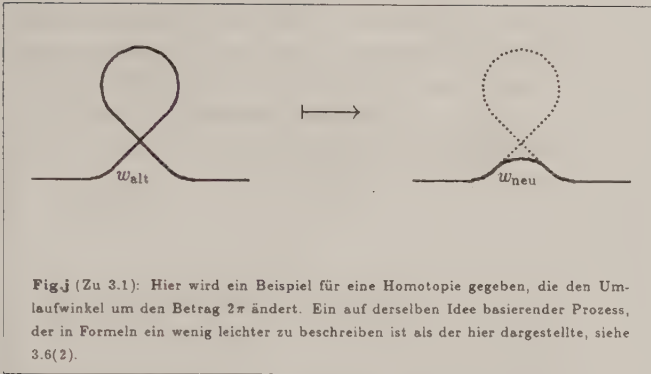
3.2 Definition: Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg. Dann heißt w "lokal doppeltpunktfrei", wenn $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ für alle $t \in [a, b]$ existiert, sodaß $w|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ doppeltpunktfrei ist. Wenn wir einen geschlossenen Weg "lokal doppeltpunktfrei" nennen, so implizieren wir zusätzlich, daß auch $(w|_{[b-\varepsilon, b]}) \cdot (w|_{[a, a+\varepsilon]})$ doppeltpunktfrei ist (vgl. 3.14(i)). Die Menge aller stückweise stetig differenzierbaren lokal doppeltpunktfreien durch M verlaufenden Wege fassen wir in der Menge " $\mathcal{W}(M)$ " zusammen. Diejenigen Wege davon, die zusätzlich geschlossen sind, bilden die Menge " $\mathcal{W}(M)$ ".

3.3 Bemerkung: Die im vorangegangenen Punkt geforderte Eigenschaft unserer stückweise differenzierbaren Wege w , lokal doppeltpunktfrei zu sein, kann weder an den Stellen der Differenzierbarkeit von w noch an den Bruchstellen der Differentiation mit $w'(t^-) \nparallel w'(t^+)$ verletzt sein. Nur an den "Spitzenpunkten", d.h. den Stellen, an denen $w'(t^-)$ in die entgegengesetzte Richtung zeigt wie $w'(t^+)$ (symbolisch: $w'(t^-) \nparallel w'(t^+)$), können Probleme entstehen, weil dann ohne eine solche zusätzliche Voraussetzung der Weg w auch derart verlaufen könnte, daß einem keine Handhabe mehr gegeben wäre, zu entscheiden, ob $\angle(w'(t^-), w'(t^+))$ nun gleich $+\pi$ oder gleich $-\pi$ sein soll (z.B. $w(t + \varepsilon) = w(t - \varepsilon)$ für $\varepsilon \in [0, \delta]$). Will man den Fall von Spitzenpunkten nicht aus allen Ergebnissen über das Verhalten des Umlaufwinkels ausnehmen, so muß man auch zeigen, wie man auch in dem Fall noch zu wohldefinierten Winkelwerten kommt:

Wie schon in A.5.2 betont, können wir auf die Definition [Crm].(Fig.4-26) nicht zurückgreifen, da diese leider nicht korrekt ist. Davon wiederum überzeugen wir uns durch folgendes

(i) Beispiel: Wir betrachten die Kurve:

$$w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (-t, t^2) & \text{für } t < 0 \\ (\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}) & \text{für } t > 0. \end{cases}$$



Sie ist differenzierbar außer an der Stelle 0, an der sie eine Spitze hat. Da die Spur für $t < 0$ auf der durch $y = x^2$ beschriebenen Parabel und die Spur für $t > 0$ auf der durch $y = 2 \cdot x^2$ beschriebenen Parabel verläuft, erfüllt die Kurve ansonsten alle Regularitätsbedingungen. Da jedoch $w'(0 - \varepsilon) = (-1, -2 \cdot \varepsilon)$ und $w'(0 + \varepsilon) = (\frac{1}{2}, \varepsilon)$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ linear abhängig sind, ist die Definition [Crm].(Fig.4-26) so nicht haltbar. Wir möchten daher noch aufzeigen, wie man den an Spitzenpunkten entstehenden Winkelwert korrekt definieren kann, ohne (wie schon in A.5.2) betont, daß dies die Grundidee der Definition von [Crm].(Fig.4-26) verletzen würde und darum zu Konsistenzschwierigkeiten bei der Übernahme der Ergebnisse aus [Crm] führen würde.

(ii): In Ergänzung unserer Definition A.3.5(iii) vereinbaren wir darum hiermit, daß Ausdrücke des Typs

$$(1) \quad \angle(v'(t^-), v'(t^+))$$

auch dann noch definiert sind, wenn $v'(t^-) \nparallel v'(t^+)$ ist, falls $\varepsilon > 0$ existiert, sodaß $v|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ doppelpunktfrei ist. Der Wert dieses Ausdrucks hängt dann freilich nicht nur von den Tangentialvektoren $v'(t^\pm)$ ab, sondern auch von dem Verlauf der Kurve v in einer Umgebung des Parameterwertes t . Wir verzichten jedoch darauf, diese Abhängigkeit in der Notation zum Ausdruck zu bringen, damit sich nicht die demnächst zu betrachtenden Umlaufwinkelsummen wegen dieses Ausnahmefalls verkomplizieren. Und zwar ermitteln wir in dem Fall den Wert solcher Ausdrücke wie folgt:

Sei (U, ϕ) eine Karte, die $w(t)$ überdeckt, sodaß

$$(2) \quad \frac{(\phi \circ w)'(t^-)}{\|(\phi \circ w)'(t^-)\|} = -\frac{(\phi \circ w)'(t^+)}{\|(\phi \circ w)'(t^+)\|} = -1 \in \mathbb{C}$$

ist. Bei der Behandlung $(C^\omega, \mathbb{C})$ -, $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ - und $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierter Mannigfaltigkeiten existiert immer eine solche Karte, bei den noch restriktiveren Typen strukturierter Mannigfaltigkeiten (vgl. A.3.1/A.2.2) unterscheidet sich der Winkelbegriff gemäß Prinzip A.3.2 ja im wesentlichen nicht von dem bei $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten definierten Begriff. Wir können daher hiermit o.B.d.A. vereinbaren, in

solchen Fällen eine Karte (U, ϕ) auch dann heranzuziehen, wenn sie nur $(\text{Aut}(C), C)$ -verträglich zu dem an sich zu betrachtenden (G, C) -Atlas ($G \subset \text{Iso}(C)$) ist. Es steht also in jedem Fall eine solche Karte (U, ϕ) zur Verfügung. Die Kurven $\phi \circ w|_{[t-\varepsilon, t]}$ und $\phi \circ w|_{[t, t+\varepsilon]}$ verlaufen nach dem Satz über implizite Funktionen (auf jeden Fall nach hinreichender Verkleinerung von ε) schlicht über einem Intervall $(0, \delta)$ der reellen Achse. Von daher sind die Ausdrücke

$$(3) \quad \underbrace{(\mathfrak{F} \circ \phi \circ w \circ (\mathfrak{R} \circ \phi \circ w|_{[t-\varepsilon, t]}))^{-1}}_{f_-}(\zeta) \text{ und } \underbrace{(\mathfrak{F} \circ \phi \circ w \circ (\mathfrak{R} \circ \phi \circ w|_{[t, t+\varepsilon]}))^{-1}}_{f_+}(\zeta) \quad (\zeta \in [0, \delta))$$

wohldefiniert. Aus der Doppelpunktfreiheit von $w|_{[t-\varepsilon, t+\varepsilon]}$ ergibt sich zudem, daß $f_+(\zeta) \neq f_-(\zeta)$ für alle $\zeta \in (0, \delta)$ ist. Ihre Differenzfunktion $f_- - f_+$ kann daher auf $(0, \delta)$ nicht das Vorzeichen wechseln. Die nachfolgende Definition hängt damit nicht von $\zeta \in (0, \delta)$ ab:

$$(4) \quad \angle(w'(t^-), w'(t^+)) := \text{sign} \left((\mathfrak{F} \circ \phi \circ w \circ (\mathfrak{R} \circ \phi \circ w|_{[t-\varepsilon, t]}))^{-1}(\zeta) - (\mathfrak{F} \circ \phi \circ w \circ (\mathfrak{R} \circ \phi \circ w|_{[t, t+\varepsilon]}))^{-1}(\zeta) \right) \cdot \pi.$$

Wohldefiniertheitsbeweis: Daß die Definition (4) von

$\angle(w(t^-), w(t^+))$ in dem hier behandelten Sonderfall auch nicht von der Wahl von ϕ abhängt, ergibt sich durch folgende Überlegung:

Wir ersetzen die Karte (U, ϕ) durch (U, ϕ') , auch in allen vorausgehenden Formeln. Die in einer Umgebung von 0 als $\gamma := \phi^{-1} \circ \phi'$ definierte Übersetzungsabbildung ist damit zumindest lokal biholomorph. Da ϕ und ϕ' beide die Gleichung (2) erfüllen, ergibt sich das Differential $d_0\gamma$ als reine Streckabbildung. Von daher läßt sich eine Umgebung des Nullpunkts bestimmen, in der alle Kurven, deren Steigung um weniger als 45° gegenüber der Richtung der reellen Achse abweicht, durch γ nur auf Kurven abgebildet werden können, die nach wie vor schlicht über der reellen Achse liegen. Da nach Voraussetzung $w|_{[t-\varepsilon, t]}$ und $w|_{[t, t+\varepsilon]}$ am Nullpunkt waagrechte Steigung haben, erfüllen sowohl diese Kurven als auch ihre Sekanten (d.h. die Verbindungsstrecken des Typs $(0, \zeta + i \cdot f_\pm(\zeta))$) diese Voraussetzung. Da $d_0\gamma$ keinen Drehanteil hat, zeigen die Tangentialvektoren von $\gamma((0, \zeta + i \cdot f_\pm(\zeta)))$ am Nullpunkt in die gleiche Richtung wie die Tangentialvektoren der geraden Verbindungen $(0, \zeta + i \cdot f_\pm(\zeta))$. Von daher, und weil nach Voraussetzung diese Kurven nach wie vor schlicht über der reellen Achse liegen, folgt, daß für alle hier zu betrachtenden reellen Koordinaten ζ die imaginären Koordinaten von $\gamma((0, \zeta + i \cdot f_-(\zeta)))$ genau dann $\geq$ als die imaginären Koordinaten von $\gamma((0, \zeta + i \cdot f_+(\zeta)))$ sind, wenn die entsprechende Aussage für die gradlinigen Verbindungen $(0, \zeta + i \cdot f_\pm(\zeta))$ galt. Diese Aussage überträgt sich auch auf die Endpunkte jener Strecken, d.h.

$$\Im(\gamma(\zeta + i \cdot f_-(\zeta))) \geq \Im(\gamma(\zeta + i \cdot f_+(\zeta))) \iff f_-(\zeta) \geq f_+(\zeta).$$

Die letzte Beziehung bestätigt die Invarianz der Definitionsgleichung (4) gegenüber jeden die Normierungsbedingung (2) erfüllenden Koordinatenwechsel.

3.4 Definition des Umlaufwinkels.

- (i) Sei $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ein stetig differenzierbarer Weg. Wir bezeichnen mit $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} \subset \mathbb{C}$ und die Überlagerungsprojektion $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, $t \mapsto \exp(i \cdot t)$ mit κ . Dann ist $t \mapsto \frac{w'(t)}{\|w'(t)\|}$ ein Weg in S^1 , der an κ nach $\mathbb{R}$ geliftet werden kann. κ^{-1} nennen wir dann eine spezielle Liftung. Wir definieren:

$$\triangleleft(w) := \triangleleft(w)_{\text{abs}} := \kappa^{-1}(w'(b)) - \kappa^{-1}(w'(a)).$$

Diese Definition erweist sich als unabhängig von der speziell gewählten Liftung.

- (ii) Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein stetig differenzierbarer Weg durch eine zweidimensionale Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit M , sodaß $w([a, b])$ durch eine Karte (U, ϕ) überdeckt werden kann. Dann ist

$$\triangleleft(w) := \triangleleft_{\text{abs}}(w) := \triangleleft(\phi \circ w)$$

entsprechend Prinzip A.3.2.

- (iii) Sei M wie in (ii) und $w : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise stetig differenzierbarer lokal doppelpunktfreier Weg. Sei $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ so gewählt, daß

(1.) $w([t_i, t_{i+1}])$ durch eine Karte, genannt (U_i, ϕ_i) überdeckt wird für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und daß

(2.) alle Bruchstellen der Differentiation von w in $\{t_0, \dots, t_n\}$ enthalten sind.

Dann definieren wir

$$(1) \quad \triangleleft(w) := \triangleleft_{\text{abs}}(w) := \sum_{i=1}^n (\triangleleft(w|_{[t_{i-1}, t_i]})) + \sum_{i=1}^{n-1} \triangleleft(w'(t_i^-), w'(t_i^+)),$$

wobei die erste Summe gemäß (ii) und die zweite gemäß A.3.5(iii)/3.3(ii) definiert ist. Diese Definition erweist sich als unabhängig von der gewählten Zerlegung und Überdeckung durch Karten dieses Weges.

- (iv) Sei M wie (ii) und (iii) und $w : [a, b] \rightarrow M$ ein geschlossener lokal doppelpunktfreier stückweise stetig differenzierbarer Weg. Dann ist

$$\oplus(w) := \oplus_{\text{abs}}(w) := \triangleleft(w) + \triangleleft(w'(b^-), w'(a^+)).$$

- (v) Sei $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/(2\pi \cdot \mathbb{Z})$ die kanonische Projektion. Dann ist

$$\triangleleft_{\text{rel}}(w) := p(\triangleleft_{\text{abs}}(w)) \quad \oplus_{\text{rel}}(w) := p(\oplus_{\text{abs}}(w)).$$

(Die Größen $\triangleleft_{\text{rel}}(w)$ und $\oplus_{\text{rel}}(w)$ sind auch für solche stückweise stetig differenzierbaren Wege w erklärt, die die Voraussetzung "lokal doppelpunktfrei" nicht erfüllen. Diese Voraussetzung ist ohnehin höchstens an den Bruchstellen der Differentiation verletzt, an denen $w'(t_i^-) \nparallel w'(t_i^+)$ ist. In dem Fall benötigen wir diese Voraussetzung, um mit Hilfe der Definition 3.3(ii) entscheiden zu können, ob der zugehörige Umlaufwinkelbeitrag $+\pi$ oder $-\pi$ ist. Bei den ohnehin nur modulo 2π definierten Größen $\triangleleft_{\text{rel}}$ und $\oplus_{\text{rel}}$ ist eine solche Entscheidung jedoch nicht nötig.)

Da als Folge der Definitionen/Konventionen (i)/A.3.5(iii)/3.3(4) jeder der Summanden der Umlaufwinkelsumme (1) das Vorzeichen wechselt, wenn wir die Durchlaufrichtung des Weges umkehren, erhalten wir:

3.5 Korollar: Sei w ein stückweise differenzierbarer lokal doppelungsfreier Weg, von dem wir bei (ii) auch noch voraussetzen, daß der geschlossen ist, und sei w_{-1} der in umgekehrter Richtung durchlaufene Weg. Dann gilt:

$$(i) \quad \angle(w_{-1}) = -\angle(w), \quad (ii) \quad \odot(w_{-1}) = -\odot(w).$$

3.6 Lemma: (vgl. 3.1(Fig.j))

Sei $w_0 : [a, b] \rightarrow M$ ein stückweise differenzierbarer lokal doppelungsfreier Weg durch eine zweidimensionale Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit M . Dann existieren auch Wege w , sodaß

$$(1) \quad \angle(w) = \angle(w_0) \pm 2\pi$$

gilt.

Beweis: Sei $c \in (a, b)$ eine Stelle der Differenzierbarkeit von w_0 und (U, ϕ) eine $w_0(c)$ überdeckende Karte. Wir wählen $\varepsilon \in \{-1, +1\}$, je nachdem, welches Vorzeichen in (1) gelten soll. Damit setzen wir

$$(2) \quad w : [a, b + 2\pi] \rightarrow M, \quad w(t) = \begin{cases} w_0(t) & \text{für } a \leq t \leq c \\ \phi^{-1}(\phi(w_0(c)) - \delta \cdot \varepsilon \cdot i \cdot (\phi \circ w_0)'(c) \cdot (\exp(i \cdot (\varepsilon \cdot t - c)) - 1)) & \text{für } c \leq t \leq c + 2\pi \\ w_0(t - 2\pi) & \text{für } c + 2\pi \leq t \leq b + 2\pi, \end{cases}$$

wobei $\delta \in \mathbb{R}_+$ so klein zu wählen ist, daß das Argument von ϕ^{-1} innerhalb von $\phi(U)$ verbleibt.

Vermittels der Definition des Umlaufwinkels in 3.4 kann nachgerechnet werden, daß die Umlaufwinkelsumme 3.4(1) von w genau drei Summanden mehr hat wie die von w_0 : nämlich $\angle(w'_1(c^-), w'_1(c^+))$ und $\angle(w'_1((c + 2\pi)^-), w'_1((c + 2\pi)^+))$ (die jedoch beide = 0 sind), sowie $\angle(w|_{[c, c + 2\pi]})$. Letzterer kann nach 3.4(ii)/3.4(i) ausgerechnet werden: Dabei erhalten wir zunächst als Abbildung $t \mapsto \frac{(\phi \circ w)'(t)}{\|(\phi \circ w)'(t)\|}$ die Vorschrift $t \mapsto \exp(i \cdot (t - c))$, sodaß wir als Liftung $\kappa^{-1}(\dots)$ die Funktion $[c, c + 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \varepsilon \cdot t - c$ wählen können. Entsprechend entsteht nach 3.4(i) der Wert $\varepsilon \cdot 2\pi$ als Umlaufwinkelbeitrag und einziger Summand, um den sich der Umlaufwinkel von w um den von w_0 unterscheidet. $\square$

3.7 Lemma: Die Umlaufwinkelbegriffe $\odot_{\text{abs}}$ und $\odot_{\text{rel}}$ sind invariant gegenüber Anfangspunktverschiebung.

Beweis: Man mache sich klar, daß bei Ersetzung eines Weges durch einen durch Anfangspunktverschiebung daraus hervorgehenden beidesmal dieselben Beiträge zum geschlossenen Umlaufwinkel (" $\odot(\cdot)$ ") auftreten, wenn man diesen berechnet, indem man

in die Definition 3.4(iv) die Definition des Umlaufwinkels gemäß 3.4(1) einsetzt. $\square$

3.8 Lemma: Sei M eine Fläche mit Ähnlichkeitsstruktur und $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg aus $\mathcal{W}(M)$ (vgl. 3.2). Dann ist

$$\mathcal{A}_{\text{rel}}(w) = \arg(\text{Dr}(\hbar(w))).$$

Beweis: Wir übernehmen Bezeichnungen und Argumentationsstrategie von Lemma 2.7 und schließen so:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\text{rel}}(w) &\stackrel{3.4(\text{iv})}{=} \mathcal{A}_{\text{rel}}(w) + \mathcal{A}(w'(b^-), w'(a^+)) \stackrel{(1.)}{=} \\ &= \mathcal{A}_{\text{rel}}(w) + \mathcal{A}(w'(b^-), w'(b^+)) \stackrel{2.5}{=} \mathcal{A}_{\text{rel}}(v) + \mathcal{A}(v'(b^-), v'(b^+)) = \\ &\stackrel{(2.)}{=} \mathcal{A}(v'(a^+), v'(b^+)) \stackrel{(3.)}{=} \arg(\text{Dr}(\hbar(w))) \end{aligned}$$

Bei dieser Rechnung wurden folgende Überlegungen benutzt:

- (1.) Genau wie bei 2.5(ii)/2.3 definieren wir bei den Wegen w und v eine Fortsetzung von $[a, b]$ auf $[a, b + \epsilon]$, bei der automatisch $w'(a^+) = w'(b^+)$ entsteht.
- (2.) Der Weg v verläuft durch $\mathbb{C}$, was uns die Möglichkeit gibt, alle Tangentialräume miteinander zu identifizieren. Da wir hier nur modulo 2π rechnen, können wir die Umlaufwinkelbeiträge " $\mathcal{A}(w|_{[t_{i-1}^-, t_i^-]})$ " der Umlaufwinkelsumme 3.4(1) als Argumentdifferenz $\arg(w'(t_i^-)) - \arg(w'(t_{i-1}^-))$ auffassen, und ebenso $\mathcal{A}(w'(t_i^-), w'(t_i^+)) = \arg(w'(t_i^+)) - \arg(w'(t_i^-))$ setzen. Mit der Möglichkeit, alle Tangentialräume von $\mathbb{C}$ zu identifizieren wird so die Umlaufwinkelsumme 3.4(1) zu einer Teleskopsumme, sodaß wir in unserem Fall, modulo 2π gerechnet, $\mathcal{A}_{\text{rel}}(v) = \mathcal{A}(v'(a^+), v'(b^-))$ erhalten. Die Gleichung (2.) folgt, da sich auch der Summand " $\mathcal{A}(v'(b^-), v'(b^+))$ " in den Teleskopsummencharakter einfügt.
- (3.) Diese Gleichung erhalten wir, wenn wir wie in 2.7 schließen, daß $\hbar(w)$ eine Ähnlichkeitsabbildung ist, die das Anfangssegment von v auf das Endsegment abbildet, und damit insbesondere $v'(a^+)$ auf $v'(b^+)$. $\square$

3.9 Definition-Bemerkung:

Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein stetiger, aber nicht stückweise stetig differenzierbarer geschlossener Weg durch eine Fläche M mit Ähnlichkeitsstruktur. Dann ist

$$\mathcal{A}_{\text{rel}}(w) := \arg(\text{Dr}(\hbar(w))).$$

Bemerkung: Diese Definition ist als Fortsetzung der Definition 3.4(v), die nur für stückweise stetig differenzierbare geschlossene Wege möglich war, in Anlehnung an die Formel 3.8 möglich und sinnvoll.

Aus 3.8/3.9 ergibt sich analog zu 1.10:

3.10 Korollar: Der relative Umlaufwinkel ist invariant gegenüber relativer Homotopie und kann von daher auch ganzen Homotopieklassen zugeordnet werden.

3.11 Lemma: Sei M eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur und $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg aus $\mathcal{W}(M)$, dessen Bruchstellen der Differentiation t_j heißen ($a < t_1 < \dots < t_p < b$). Sei k_g seine geodätische Krümmung wie in A.5.1(viii). Dann gilt:

$$\angle(w) = \int_a^b k_g ds + \sum_{j=1}^p \angle(w'(t_j^-), w'(t_j^+)),$$

wobei das Integral auf der rechten Seite gemäß A.5.1(iv), A.5.3 und A.5.6 definiert ist.

Beweis: Wir ersetzen den Term " $\angle(w)$ " durch seine Definition in 3.4(1) und reduzieren damit die Behauptung darauf, zu zeigen, daß für alle stetig differenzierbaren durch eine Koordinatenumgebung überdeckten Wege w_i die Beziehung $\angle(w_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} k_g ds$ gilt. Daß dies der Fall ist, sehen wir, indem wir [Crm].4.4(Prop.4) benutzen und dabei das übliche $\mathbb{R}^2$ -Koordinatensystem auf der Karte unserer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit verwenden. Dann reduziert sich die Formel aus [Crm].4.4(Prop.4) zu $k_g = \frac{d\phi}{ds}$, wobei ϕ nach [Crm].4.4(Lemma 1) genau eine solche Winkelfunktion ist, wie sie auch der in 3.4(i) betrachteten Liftung $\kappa^{-1}(w)$ entspricht. $\square$

3.12 Lemma: Sei D eine Zelle aus einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit mit stetig differenzierbarem Rand. Der Weg w parametrisiere diesen Rand und durchlaufe ihn im Sinne der positiven Orientierung entsprechend A.5.1(v). Dann gilt $\angle(w) = 2\pi$.

Beweis: Nach 3.11 ist $\angle(w)$ eine Summe von Term 1 und Term 3 der Gauß-Bonnet-Formel A.5.1(1). Term 2 jener Formel verschwindet nach A.5.5. Damit gilt also: $\angle(w) = 2\pi \cdot \chi(D)$, wobei ja $\chi(D) = 1$ für die Eulercharakteristik χ der Zelle D gilt. $\square$

3.13 Hilfslemma aus der Topologie:

Sei M ein Ähnlichkeitstorus und $w_1, w_2 : [0, 1] \rightarrow M$ zwei geschlossene Wege daraus. $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ seien Liftungen der beiden unendlich periodisch fortgesetzten Wege nach $\tilde{M}$, d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$ wird

$$(1) \quad w_j(t) := w_j([t])$$

gesetzt. Sind $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ doppeltpunktfrei und disjunkt zueinander, so zerlegen sie $\tilde{M}$ in genau drei Komponenten, von denen genau eine $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ in ihrem Rand hat

Beweis: Als Torus kann $\tilde{M}$ (unter Umständen aber nicht verträglich zur Ähnlichkeitsgeometrie) auf jeden Fall so als euklidische Ebene mit Norm (" $|\cdot|$ ") metrisiert werden, daß die Blattstruktur von M ein Parallelogrammgitter ist; für die in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori z.B. gemäß A.2.17(v)/A.2.18(v)/A.2.8(iv)/A.2.9. Da $\tilde{w}_1|_{[0,1]}$ als kompakter Weg nur durch endlich viele Blätter verläuft und da eine Deckbewegung σ existiert, sodaß $\tilde{w}_1|_{[j,j+1]} = \sigma^j(\tilde{w}_1|_{[0,1]})$ ist, läßt sich anhand der Blattstruktur erkennen, daß $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} |\tilde{w}_1(t)| = \infty$ gilt. Durch Anwendung des Jordanschen Kurvensatzes auf die Ein-Punkt-Kompaktifikation von $\tilde{M}$ ergibt sich, daß $\tilde{M}$ durch $\tilde{w}_1$ in zwei Komponenten zerlegt wird. $\tilde{w}_2$ zerlegt dann eine dieser Komponenten ein zweites Mal. $\square$

3.14 Bemerkung: Da wir in dieser Arbeit grundsätzlich keine unterschiedlichen Bezeichnungen für eine "Weg" genannte Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurve und für die Parametrisierungsabbildung wählen, könnte es bei den folgenden Beweisen dadurch Mißverständnisse geben, daß manche Verknüpfungen und Notationszusätze unterschiedliche Bedeutung haben, je nachdem, ob man sie auf einen abstrakten Weg, oder eine Parametrisierungsabbildung bezieht. Wir versuchen dem vorzubeugen, indem wir an dieser Stelle die für die ganze Arbeit gültigen Konventionen auflisten.

Seien $v, w : [0, 1] \rightarrow M$ Wege. Dann gilt:

- (i) $w \cdot v$ bezeichnet den Weg, der dadurch entsteht, daß erst w und dann v durchlaufen wird.
- (ii) Das Symbol "o" bezieht sich grundsätzlich auf die Verkettung von Abbildungen und referiert im Zusammenhang mit Wegen immer deren Parametrisierungsabbildung.
- (iii) w^{-1} bezeichnet die Umkehrabbildung der Parametrisierungsabbildung w .
- (iv) Den Weg, der entsteht, wenn wir w in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, nennen wir w_{-1} .
- (v) Wollen wir den Weg bezeichnen, der dadurch entsteht, daß wir das Teilsegment $w|_{[a,b]}$ in entgegengesetzter Richtung durchlaufen, so schreiben wir " $w|_{[b,a]}$ " ($a < b$)

3.15 Lemma: Sei M ein in Standarddarstellung gegebener echter Ähnlichkeitstorus und w_1, w_2 doppelpunktfreie nicht nullhomotope, aber zueinander relativ homotope Wege aus $\mathcal{W}(M)$. Dann ist $\otimes_{\text{abs}}(w_1) = \otimes_{\text{abs}}(w_2)$.

Beweis: Wir benutzen die Standarddarstellung von M und $\widetilde{M}$ gemäß A.2.15/A.2.18. Seien $w_j : [0, 1] \rightarrow M$ die beiden ursprünglich gegebenen Wege, wobei ja nach Voraussetzung $[w_j] = p \cdot \alpha_1 + q \cdot \alpha_2$ gelte ($j \in \{1, 2\}$). Mit $\tilde{w}_1$ bezeichnen wir dann eine Liftung des (wie in 3.13(1)) unendlich periodisch fortgesetzten Weges w_1 , wobei $\tilde{w}_1(0) = (1, 0) \in \widetilde{C}^*$ sein soll. Es existiert dann eine Schranke k_1 , sodaß

$$(1) \quad \{(i, j) \mid B_{i,j} \cap \tilde{w}_1(\mathbb{R}) \neq \emptyset\} \subset \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |q \cdot i - p \cdot j| < k_1\}.$$

Eine solche Schranke konstruiert man, indem man sich zunächst klarmacht, daß $\tilde{w}_1(\{0, 1\})$ eine kompakte Menge ist, die nur endlich viele Blätter $B_{i,j}$ berühren kann. Für $\tilde{w}_1(\{0, 1\})$ ist die Existenz eines solchen k_1 von daher selbstverständlich. Da jedoch

$$(2) \quad \tilde{w}_1(\mathbb{R}) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (\sigma_{p,q}^m(\tilde{w}_1(\{0, 1\})))$$

ist, gilt dieses k_1 sofort für den gesamten unendlich langen Weg $\tilde{w}_1$. Sei $\tilde{w}_2$ als Liftung des unendlich periodisch fortgesetzten Weges w_2 erklärt, allerdings mit Anfangspunkt $\tilde{w}_2(0) = S_1^{r_1} \cdot S_2^{r_2}$ ($r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$). Es existiert dann $k_2 \in \mathbb{N}$, sodaß

$$(3) \quad \{(i, j) \mid B_{i,j} \cap \tilde{w}_2(\mathbb{R}) \neq \emptyset\} \subset \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid |q \cdot (i - r_1) - p \cdot (j - r_2)| < k_2\}.$$

(1) und (3) gestatten, r_1 und r_2 so zu wählen, daß $\tilde{w}_2(\mathbb{R}) \cap \tilde{w}_1(\mathbb{R}) = \emptyset$ ist. Für $j \in \{1, 2\}$ wählen wir mit s_j je eine Stelle der Differenzierbarkeit von $\tilde{w}_j$ und verbinden $\tilde{w}_1(s_1)$ mit $\tilde{w}_2(s_2)$ durch einen doppelpunktfreien Weg $y : [0, 1] \rightarrow \widetilde{C}^*$ aus $\mathcal{W}(\widetilde{C}^*)$, sodaß

$y((0,1)) \cap (\tilde{w}_1(\mathbb{R}) \cup \tilde{w}_2(\mathbb{R})) = \emptyset$ und $0 \neq |\angle(y'(j-1), \tilde{w}'_j(s_j))| \neq \pi$ für $j \in \{1, 2\}$ ist. Wir betrachten dann (Bezeichnungen vgl. 3.14) den durch Hintereinanderdurchlaufen entstehenden Weg:

$$(4) \quad \tilde{w}_1|_{[s_1, s_1+1]} \cdot \sigma_{p,q}(y) \cdot \tilde{w}_2|_{[s_2+1, s_2]} \cdot y_{-1}.$$

1.Fall: Dieser Weg ist doppeltpunktfrei. Da nach A.2.8(iii)/A.2.9 $\tilde{C}^*$ homöomorph zur euklidischen Ebene ist, folgt dann mit dem Jordanschen Kurvensatz, daß er Rand einer Zelle B ist. Den Umlaufwinkel dieses Zellrandes können wir dann nach 3.4/3.5 wie folgt darstellen:

$$(5) \quad \begin{aligned} & \angle(\tilde{w}_1|_{[s_1, s_1+1]}) + \angle(\tilde{w}'(s_1+1), \sigma_{p,q}(y'(0))) + \angle(\sigma_{p,q}(y)) + \\ & + \angle(\sigma_{p,q}(y'(1)), -\tilde{w}'_2(s_2+1)) + \angle(\tilde{w}_2|_{[s_2+1, s_2]}) + \\ & + \angle(-\tilde{w}'_2(s_2), -y'(1)) + \angle(y_{-1}) + \angle(-y'(0), \tilde{w}'_1(s_1)) \\ & = \odot(\partial B) \stackrel{3.12}{=} \varepsilon \cdot 2\pi, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ durch diese Gleichung definiert wird. Da die Wege $y, \sigma_{p,q}(y)$ und die Zelle B nur in dem Segment von $\tilde{C}^* - (\tilde{w}_1(\mathbb{R}) \cap \tilde{w}_2(\mathbb{R}))$ liegen können, das nach 3.13 dadurch ausgezeichnet ist, $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ als Randkurven zu enthalten, ergibt die Orientierungskonvention A.5.1(v), daß die vier Summanden in (5), die an den Nahtstellen des Weges (4) entstehen, alle das Vorzeichen ε tragen. Als Winkelwerte an Nicht-Spitzenpunkten sind diese vier Summanden außerdem vom Betrag her kleiner als π . Mit Hilfe des mit unserer Konstruktion verträglichen Operierens der Deckbewegung $\sigma_{p,q}$, insbesondere ihrer Winkeltreue nach A.2.17(iii)/A.3.5(iii), folgern wir dann:

$$(6) \quad \begin{aligned} & \angle(-y'(0), \tilde{w}'_1(s_1)) + \angle(\tilde{w}'_1(s_1+1), \sigma_{p,q}(y'(0))) = \\ & = \angle(-y'(0), \tilde{w}'_1(s_1)) + \angle(\sigma_{p,q}(w'_1(s_1)), \sigma_{p,q}(y'(0))) = \\ & = \angle(-y'(0), \tilde{w}'_1(s_1)) + \angle(\tilde{w}'_1(s_1), y'(0)) = \varepsilon \cdot \pi, \end{aligned}$$

wobei uns die vorausgehenden Größen- und Vorzeichenüberlegungen befähigt haben, in der letzten Zeile von (6) nicht nur " $\equiv \pi \bmod 2\pi$ " zu folgern, sondern den exakten Wert zu erschließen. Eine analoge Analyse der an dem Weg $\tilde{w}_2$ anliegenden Winkel von ∂B führt dann zu dem Ergebnis, daß

$$(7) \quad \angle(\sigma_{p,q}(y'(1)), -\tilde{w}'_2(s_2+1)) + \angle(-\tilde{w}'_2(s_2), -y'(1)) = \varepsilon \cdot \pi$$

ist. Da nach A.2.17(iii)/2.5 Deckbewegungen umlaufwinkeltreu operieren, gilt $\angle(y) = \angle(\sigma_{p,q}(y))$. Setzen wir dies, zusammen mit (6)/(7) in die Formel (5) ein, entsteht

$$(8) \quad \angle(\tilde{w}_1|_{[s_1, s_1+1]}) = \angle(\tilde{w}_2|_{[s_2, s_2+1]}).$$

Wir können mit 2.5 in (8) auch die " $\sim$ " weglassen, denn die Wege $\tilde{w}_j$ sind ja als Liftungen von w_j geometrisch äquivalent zu den w_j . Benutzen wir dann weiter, daß die Stellen s_j Stellen der Differenzierbarkeit von w_j sind, sodaß $\angle(w_j) = \odot(w_j)$ ist, und die Invarianz gegenüber Anfangspunktverschiebung nach 3.7, so entsteht $\odot(w_1) = \odot(w_2)$.

2.Fall: Der in (4) genannte Weg ist nicht doppel­punkt­frei. Nach den Konstruktions­vorgaben, insbesondere der Invarianz von $\tilde{w}_1$ und $\tilde{w}_2$ unter $\sigma_{p,q}$ können sich höchstens die ∂B -Segmente $\sigma_{p,q}(y)$ und y_{-1} untereinander schneiden. Tritt das ein, so kann man darin zwar die Folge einer ungeschickten Wahl von y sehen, es dürfte aber leichter sein, diesen Fall durch das nachstehende Argument zu behandeln, als zu zeigen, daß sich y in jedem Fall auch geschickt wählen läßt:

Da $y([0, 1])$ kompakt ist, durchläuft es nur endlich viele Blätter $(B_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$. Für genügend großes M gilt daher:

$$y([0, 1]) \cap (\sigma_{p,q}^m \circ y)([0, 1]) = \emptyset,$$

da diese Wege nicht einmal ein gemeinsames Blatt berühren. Der Weg

$$\tilde{w}_1|_{[s_1, s_1+m]} \cdot \sigma_{p,q}^m(y) \cdot \tilde{w}_2|_{[s_2+m, s_2]} \cdot y_{-1}$$

ist dann doppel­punkt­frei und gestattet eine analoge Argumentation wie beim 1. Fall; da die Wege $\tilde{w}_j$ an den Stellen $s_j + k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ nach Konstruktion keine Bruchstelle der Differentiation haben und von daher

$$\angle(\tilde{w}_j|_{[s_j, s_j+m]}) = \sum_{k=1}^m \angle(\tilde{w}_j|_{[s_j+k-1, s_j+k]}) = \sum_{k=1}^m \sigma_{p,q}^{k-1}(\tilde{w}_j|_{[s_j, s_j+1]}) = m \cdot \tilde{w}_j|_{[s_j, s_j+1]}$$

gilt, läßt sich auch in dem Fall auf $\oplus(w_1) = \oplus(w_2)$ zurückschließen. $\square$

3.16 Lemma: Die Aussage von 3.15 gilt auch, wenn M kein echter, sondern ein in Standarddarstellung gegebener euklidischer Ähnlichkeitstorus ist.

Beweis: Im Prinzip gilt derselbe Beweis wie bei 3.15; wir müßten lediglich bei einer genauen Durchführung berücksichtigen, daß nach Lemma A.2.17(v) $\mathbb{C}$ und nicht $\tilde{\mathbb{C}}^*$ als universelle Überlagerung der euklidischen Ähnlichkeitstori auftritt. Es ist jedoch in jedem Fall möglich, sämtliche in A.2.18/3.15 getätigten Konstruktionen mit Log von $\tilde{\mathbb{C}}^*$ nach $\mathbb{C}$ zu übertragen und damit die Argumentation von 3.15 durchzuziehen. $\square$

3.17 Kriterium und Bemerkungen:

Sei w ein geschlossener Weg aus einer Mannigfaltigkeit M , derart, daß ein doppel­punkt­freier Weg entsteht, wenn w zuerst im Sinne von 3.13(1) unendlich periodisch fortgesetzt und anschließend in die universelle Überlagerung geliftet wird.

- (i) Alle nicht-nullhomotopen doppel­punkt­freien Wege erfüllen das eben genannte Kriterium.
- (ii) Die Aussagen von 3.15/3.16 gelten bereits für Wege w_1, w_2 , die anstatt doppel­punkt­frei zu sein, nur das abgeschwächte eben formulierte Kriterium erfüllen.
- (iii) Ist M ein Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung, so enthält jede nicht-triviale Homotopieklasse Repräsentanten, die das oben genannte Kriterium erfüllen. Z.B.:

Sind $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ und $M = \mathbb{C}/\langle a_1, a_2 \rangle$ ein euklidischer Ähnlichkeitstorus nach A.2.4, so gilt das für alle $p, q \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} - \{(0, 0)\}$ für die Wege $w_{p,q} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto t \cdot (p \cdot a_1 + q \cdot a_2)$. Ist M ein echter Ähnlichkeitstorus $\Gamma_{\mathbb{C}p}(\tilde{\mathbb{C}}^*/\langle S_1, S_2 \rangle)$, so können für

denselben Indexbereich die Wege $v_{p,q} : [0,1] \rightarrow \tilde{C}^*$, $t \mapsto (S_1^p \cdot S_2^q)^t$ herangezogen werden.

3.18 Definition: Sei M ein Ähnlichkeitstorus in seiner Standarddarstellung und $0 \neq \alpha \in \pi_1(M)$. Dann bezeichnen wir als absoluten Umlaufwinkel der Homotopieklasse α folgende reelle Zahl:

$$(1) \quad \textcircled{\alpha} := \textcircled{w},$$

wobei w ein Repräsentant von α aus $\dot{W}(M)$ ist, der das Doppelpunktfreiheitskriterium 3.17 erfüllt. Ferner setzen wir

$$(2) \quad \textcircled{\alpha} := 0, \text{ wenn } \alpha \text{ die triviale Homotopieklasse ist.}$$

3.19 Lemma: Der Begriff des absoluten Umlaufwinkels mit der Definition von 3.18 bildet einen Homomorphismus $\pi_1(M) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$.

Beweis: Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \pi_1(M)$, wobei M und $\tilde{M}$ in diesem Beweis als echter Ähnlichkeitstorus gemäß der Standarddarstellung A.2.15/A.2.18 vorausgesetzt wird (für die Behandlung der euklidischen Ähnlichkeitstori gilt 3.16 analog).

Zu zeigen ist: $\textcircled{\alpha_1} + \textcircled{\alpha_2} = \textcircled{\alpha_3}$ unter der Voraussetzung $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_3$. Ist α_1 oder α_2 die triviale Homotopieklasse, so ist nach 3.18(2) die Behauptung klar. Ist α_3 die triviale Homotopieklasse, d.h. $\alpha_1 = -\alpha_2$, so können α_1 und α_2 ja durch invers zu durchlaufende Wege dargestellt werden, und die Behauptung folgt aus 3.5. Im weiteren sei also $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \neq 0$. Wir stellen unsere drei Homotopieklassen durch Wege dar, und liften diese, beginnend ab dem Punkt $(1,0)$, in die universelle Überlagerung. Die Endpunkte dieser Liftungen liegen dann bei den $\tilde{C}^*$ -Koordinaten S_1, S_2 bzw. S_3 . Gemäß 3.15–3.17 können wir uns für die Umlaufwinkelberechnung auf diejenigen Wege w_1, w_2, w_3 zurückziehen, deren Liftung nach $\tilde{C}^*$ durch die nachfolgenden Wege gegeben ist:

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{w}_1 : [0,1] &\rightarrow \tilde{C}^* & , \quad t &\mapsto S_1^t \\ \tilde{w}_2 : [0,1] &\rightarrow \tilde{C}^* & , \quad t &\mapsto S_1 \cdot S_2^t \\ \tilde{w}_3 : [0,1] &\rightarrow \tilde{C}^* & , \quad t &\mapsto S_3^t \end{aligned}$$

Da wegen der entsprechenden Eigenschaften der Homotopieklassen α_j

$$(2) \quad S_1 \cdot S_2 = S_3 \quad \text{und} \quad S_1, S_2, S_3 \neq (1,0)$$

gilt, bleiben nur die nachfolgenden zwei Fälle zu unterscheiden:

1.Fall: S_2 ist eine reelle Potenz von S_1 . Dann verlaufen also die Wege $\tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2$ und $\tilde{w}_3$, die die Umlaufwinkel von $\alpha_1 + \alpha_2$ und α_3 tragen, über dieselbe Spur, sodaß auf eine Übereinstimmung der Umlaufwinkel geschlossen werden kann.

2.Fall: (vgl. die Bezeichnungskonvention 3.14) Ist S_2 keine reelle Potenz von S_1 , so bildet der Weg $\text{Log}(\tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2 \cdot \tilde{w}_3)$ ein Dreieck in $\mathbb{C}$. Von daher ist $\tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2 \cdot \tilde{w}_3$ ein Zellrand

in $\tilde{C}^*$, dessen Umlaufwinkel $\pm 2\pi$ ist. Mit ähnlichen Argumenten wie in 3.15 kann man nachrechnen, daß bereits die an den drei echten Ecken $\tilde{w}_1(0)=\tilde{w}_3(0)$, $\tilde{w}_1(1)=\tilde{w}_2(0)$ und $\tilde{w}_2(1)=\tilde{w}_3(1)$, anliegenden Winkel zusammen $\pm 2\pi$ (mit demselben Vorzeichen) ergeben, sodaß sich auf die Umlaufwinkelgleichheit von $\tilde{w}_1 \cdot \tilde{w}_2$ und $\tilde{w}_3$ schließen läßt, die zu der hier zu zeigenden Umlaufwinkelbeziehung äquivalent ist. $\square$

3.20 Bemerkung: Das gemäß 3.17(i)/3.18 für die nicht-trivialen Homotopieklassen aufgestellte Prinzip, daß der absolute Umlaufwinkel durch die doppelungsfreien Repräsentanten gegeben wird, ist für die Klasse der nullhomotopen Wege falsch. Auf einem Torus sind aber alle doppelungsfreien Repräsentanten der trivialen Homotopieklasse Zellränder, und diese haben nach 3.12 alle Umlaufwinkelwerte $\pm 2\pi$, während dieser Homotopieklasse nach 3.18(2) der Umlaufwinkel 0 zugewiesen wird (und auch zugewiesen werden muß, wenn $\otimes_{\text{abs}}$ ein Homomorphismus sein soll).

3.21 Lemma:

- (i) Sei $S \in \tilde{C}^*$ und $w : [0, 1] \rightarrow \tilde{C}^*$, $t \mapsto S^t$. Dann ist $\angle_{\text{abs}}(w) = \text{Arg}(S)$.
(ii) Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ ein echter Ähnlichkeitstorus in seiner Standarddarstellung A.2.15, $S \in H \subset \tilde{C}^*$ und κ die kanonische Projektion $\tilde{C}^* \rightarrow M$. Ferner seien $w : [0, 1] \rightarrow \tilde{C}^*$, $t \mapsto S^t$ und $\kappa \circ w$ Wege durch $\tilde{C}^*$ bzw. M . Dann ist $\text{Arg}(S)$ zugleich der geschlossene Umlaufwinkel des Weges $\kappa \circ w$, als auch der von diesem Weg repräsentierten Homotopieklasse aus $\pi_1(M)$.

Beweis von (i): Wir ersetzen zunächst $w(t) = S^t$ durch den geometrisch äquivalenten Weg $t \mapsto \text{Cpl}(S^t)$ und rechnen:

$$\begin{aligned} \text{Cpl}(S^t) &\stackrel{\text{A.2.13}}{=} \text{Cpl}(\exp(t \cdot \text{Log}(S))) \stackrel{\text{A.2.8(i)}/\text{A.2.8(iv)}}{=} \exp(t \cdot \text{Log}(S)) \stackrel{\text{A.2.8(iii)}}{=} \\ &= \exp(t \cdot (\ln(|\text{Cpl}(S)|) + i \cdot \text{Arg}(S))) = |\text{Cpl}(S)|^t \cdot (\exp(i \cdot t \cdot \text{Arg}(S))). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Da } \frac{\frac{d}{dt} |\text{Cpl}(S)|^t \cdot (\exp(i \cdot t \cdot \text{Arg}(S)))}{\left| \frac{d}{dt} |\text{Cpl}(S)|^t \cdot (\exp(i \cdot t \cdot \text{Arg}(S))) \right|} &= \\ &= \pm 1 \cdot i \cdot \exp(i \cdot t \cdot \text{Arg}(S)) = \exp\left(\pi \mp \frac{\pi}{2}\right) \cdot \exp(i \cdot t \cdot \text{Arg}(S)) \end{aligned}$$

ist, macht es bei dem zuletzt bestimmten differenzierbaren Weg keine Schwierigkeiten, den Umlaufwinkelbeitrag gemäß 3.4(i) durch explizite Konstruktion von κ^{-1} direkt auszurechnen: Es entsteht $\text{Arg}(S)$. — Damit ergibt sich dann auch

(ii), denn $\kappa \circ w$ erfüllt das Doppelpunktfreiheitskriterium 3.17, hat auch an seinem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt keine Bruchstelle der Differentiation und ist zu w geometrisch äquivalent. $\square$

3.22 Lemma: Sei M ein in Standarddarstellung gegebener Ähnlichkeitstorus und $\alpha \in \pi_1(M)$. Mit κ werde die kanonische Projektion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/2\pi \cdot \mathbb{Z}$ bezeichnet. Dann gilt:

- (i) $\kappa(\otimes_{\text{abs}}(\alpha)) = \otimes_{\text{rel}}(\alpha)$.
(ii) $\kappa(\otimes_{\text{abs}}(\alpha)) = \arg(\text{Dr}(\hbar(\alpha)))$ (vgl. 1.17).

(iii) Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle)$ und h' die in $\tilde{C}^*$ definierte Holonomie des $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Torus $\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle$ gemäß A.2.14/1.10. Nach Konstruktion in A.2.14/A.2.15 sind $\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle$ und sind $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle S_1, S_2 \rangle)$ wohlstrukturierte Mannigfaltigkeiten, die auf derselben Punktmenge definiert sind, und auf denen daher dieselben Wegemengen und Mengen von Homotopieklassen definiert sind. Für jede auf diesen Tori definierte Homotopieklasse α gilt daher: $\text{Arg}(h'(\alpha)) = \oplus_{\text{abs}}(\alpha)$ (vgl. A.2.8(ii)).

Beweis: (i) folgt aus 3.4(v), da ja nach 3.18/3.10 der für Homotopieklassen definierte Umlaufwinkel nur als Umlaufwinkel geeignet gewählter Repräsentanten definiert ist. (ii) folgt dann aus (i) und 3.9.

Zu (iii): Die Homotopieklasse α werde gemäß 3.17(iii) durch einen Weg $v_{p,q}$ dargestellt. Sei $S := S_1^p \cdot S_2^q$, wobei S_1, S_2 wie in 3.17(iii) definiert sind. Mit Hilfe des Repräsentanten $v_{p,q}$ kann nach 1.19(i) einerseits ausgerechnet werden, daß $\ell_S : Z \mapsto S \cdot Z$ die Holonomie $h'(\alpha)$ ist. Gemäß der in A.1.9(iii) vereinbarten Identifikation gilt also $h'(\alpha) = S$. Die Aussage (iii) ergibt sich dann durch folgende Rechnung:

$$\text{Arg}(h'(\alpha)) = \text{Arg}(S) \stackrel{3.21(ii)}{=} \oplus_{\text{abs}}(v_{p,q}) \stackrel{3.17/3.18}{=} \oplus_{\text{abs}}(\alpha) \quad \square$$

3.23 Lemma: Unterscheidung der echten Ähnlichkeitstori.

Seien $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle A_1, A_2 \rangle)$ und $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\langle B_1, B_2 \rangle)$ zwei echte Ähnlichkeitstori in ihrer Standarddarstellung, wobei $\{A_1, A_2\}$ und $\{B_1, B_2\}$ verschiedene Untergruppen von $\tilde{C}^*$ erzeugen. Dann sind die beiden Ähnlichkeitstori nicht strukturegleich.

Beweis: Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ ein echter Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung gemäß A.2.15. Nach 2.8 kann der Vergrößerungsfaktor ζ als kanonischer Homomorphismus $\zeta : \pi_1(M) \rightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot)$ aufgefaßt werden. Gleiches gilt nach 3.18 für den absoluten Umlaufwinkel $\oplus_{\text{abs}} : \pi_1(M) \rightarrow (\mathbb{R}, +)$. Da ζ und $\oplus_{\text{abs}}$ strukturinvariante Homomorphismen sind, gilt analoges auch für den Homomorphismus h , den wir jetzt wie folgt definieren:

$$(1) \quad h : \pi_1(M) \rightarrow \tilde{C}^* \quad , \quad h(\alpha) = \zeta(\alpha) \cdot \text{Exp}(i \cdot \oplus_{\text{abs}}(\alpha)).$$

Nach 3.21(ii)/2.4(i) ist die Gruppe $h(\pi_1(M))$ gerade die zur Definition von M benutzte Gruppe H . $\square$

Aus 3.23 und A.2.14/A.2.15 erhalten wir schließlich:

3.24 Zweiter Klassifikationssatz:

Die in Standarddarstellung gemäß A.2.15 konstruierten echten Ähnlichkeitstori werden durch die Gitter (vgl. 1.20) klassifiziert. Die Zuordnung erfolgt dadurch, daß jedem Gitter $H \subset \mathbb{C}$ der Torus $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/\text{Exp}(H))$ zugeordnet wird.

§4: Unterschiede in der Geometrie der in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori

4.1 Satz: Sei M ein Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung gemäß A.2.4/A.2.15.

Dann operiert die Gruppe der strukturerhaltenden Autohomöomorphismen von M transitiv.

Beweis:

1. Fall: Sei M ein euklidischer Ähnlichkeitstorus. Dann ist M nach A.2.4 strukturerhaltend homöomorph zu $\mathbb{C}/H$, wobei H ein Gitter ist. Damit kommutiert die Gruppe aller Translationen mit H und ergibt somit induzierte Abbildungen auf $\mathbb{C}/H$, die dort als transitiv operierende Gruppe von strukturerhaltenden Autohomöomorphismen erscheinen.
2. Fall: Sei M ein echter Ähnlichkeitstorus. Es gilt im wesentlichen dasselbe Argument wie beim, 1. Fall nur daß bei diesen nach A.2.17(v) der Raum $\tilde{\mathbb{C}}^*$ (siehe A.2.8–A.2.10) an die Stelle von $\mathbb{C}$ tritt, und die Gruppe der Linksoperationen von $\tilde{\mathbb{C}}^*$ auf sich anstelle der Translationen.

4.2 Lemma: Seien v_1 und v_2 ein Fundamentalsystem eines in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstorus M . Dann gilt für die Menge der in M auftretenden Umlaufwinkel:

$$(1) \quad \{\oplus_{\text{abs}}(w) \mid w \in \mathring{W}(M)\} = \{p \cdot \oplus_{\text{abs}}(v_1) + q \cdot \oplus_{\text{abs}}(v_2) + r \cdot 2\pi \mid p, q, r \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis — 1. Zu zeigen: “ $\subset$ ”

Sei w also ein solcher Weg aus unserem Ähnlichkeitstorus. Gemäß 4.1 können wir w durch einen umlaufwinkelgleichen ebenfalls w zu nennenden Weg u ersetzen, der durch den Aufpunkt unserer Fundamentalgruppe läuft. Die durch u repräsentierte Homotopieklasse (Symbol: “[w]”) erfüllt dann für geeignete $p, q \in \mathbb{Z}$

$$p \cdot [v_1] + q \cdot [v_2] = [w].$$

Da $\oplus_{\text{rel}}$ nach 3.10 eine Homotopieinvariante und ein Homomorphismus ist, gilt auch für die Wege in $\mathbb{R}/2\pi \cdot \mathbb{Z}$ folgende Gleichung:

$$p \cdot \oplus_{\text{rel}}(v_1) + q \cdot \oplus_{\text{rel}}(v_2) = \oplus_{\text{rel}}(w).$$

Bei Rechnung in $\mathbb{R}$ entsteht also ein Ausdruck auf der rechten Seite von (1).

2. Zu zeigen: “ $\supset$ ”

Es sei also zu $p, q, r \in \mathbb{Z}$ ein Weg w so zu konstruieren, daß $\oplus(w) = p \cdot \oplus(v_1) + q \cdot \oplus(v_2) + r \cdot 2\pi$ ist. Falls $p \neq 0$ oder $q \neq 0$ finden wir ja zunächst einen Weg w_0 mit $\oplus(w_0) = p \cdot \oplus(v_1) + q \cdot \oplus(v_2)$, nämlich mindestens den in 3.17(iii) beschriebenen Repräsentanten der Homotopieklasse $p \cdot [v_1] + q \cdot [v_2]$. Indem man den Weg w_0 durch $|r|$, der in 3.6 beschriebenen Prozesse zu einem Weg w undefiniert, erhalten wir den gesuchten Weg w , falls p und q nicht gleichzeitig verschwinden. Für $p = 0 = q$ gilt ein analoges Argument: zum Ausgangspunkt unserer Konstruktion können wir in dem Fall einen Zellrand (z.B. den in jeder Koordinatenumgebung zu konstruierenden Rand eines Kreises) wählen, dessen Umlaufwinkel aber nach 3.12 gleich $\pm 2\pi \neq 0 \cdot \oplus(v_1) + 0 \cdot \oplus(v_2)$ ist. $\square$

4.3 Lemma: Sei M ein euklidischer Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung. Dann verschwindet der Umlaufwinkel aller Homotopieklassen von Wegen aus M und der geschlossene Umlaufwinkel jedes Weges aus $\mathring{W}(M)$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 2π .

Beweis: Nach A.2.4 ist M strukturgleich zu $\mathbb{C}/H$, wobei H ein von zwei Translationen, die hier τ_1 und τ_2 heißen mögen, erzeugtes Gitter gemäß 1.20 ist. Damit bilden die Wege $w_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}/H$, $t \mapsto t \cdot \tau_j(0)$ ein Fundamentalsystem des Ähnlichkeitstorus M . Diese Wege haben keine Bruchstellen der Differentiation, auch nicht an ihrem gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt $w_j(0) = w_j(1)$ und sind außerdem doppeltpunktfreie Geraden. Von daher entstehen keine Beiträge zur Umlaufwinkelsumme 3.4(1). Somit verschwinden nach 3.18 die auch für die Homotopieklassen gültigen Umlaufwinkelwerte auf diesen beiden Erzeugenden, sodaß der Homomorphismus $\mathbb{Q}_{\text{abs}} : \pi_1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ keine von 0 verschiedenen Bildwerte annehmen kann. Die Aussage über die Umlaufwinkelwerte der Wege selber ergibt sich aus 4.2. $\square$

4.4 Satz: Es existieren immer nicht-triviale Umlaufwinkel und Vergrößerungsfaktoren bei Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung von echten Typus (vgl. A.2.15), aber niemals bei einem vom euklidischen Typus (vgl. A.2.4). Präzise: (Definitionen siehe 3.2/3.4/2.3/2.8/3.10/3.18)

(i) Im Fall des euklidischen Typus gilt: Dann ist

$$\begin{aligned} \zeta(w_1) &= 1 && \text{für alle geschlossenen Wege } w_1, \\ \mathbb{Q}_{\text{abs}}(w_2) &= 0 && \text{für alle nicht-nullhomotopen doppeltpunktfreien Wege aus } \mathring{W}(M), \\ \zeta(\alpha) &= 1 && \text{für alle } \alpha \in \pi_1(M), \\ \mathbb{Q}(\alpha) &= 0 && \text{für alle } \alpha \in \pi_1(M). \end{aligned}$$

(ii) Liegt dagegen der Fall eines echten Typus vor, so existieren w_1, w_2 wie in (i) und $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi_1(M)$ mit

$$\zeta(w_1) \neq 1, \quad \mathbb{Q}_{\text{abs}}(w_2) \neq 0, \quad \zeta(\alpha_1) \neq 1, \quad \mathbb{Q}_{\text{abs}}(\alpha_2) \neq 0.$$

Beweis: Die Ergebnisse für die Homotopieklassen folgen aus 4.3/1.23/2.7; die für die Wege werden durch 2.8/3.18 darauf zurückgespielt; vergleiche auch das für den Vergrößerungsfaktor elementar erzielte Ergebnis 2.4. $\square$

4.5 Lemma: Sei M ein echter Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung und $v_1, v_2 : [a, b] \rightarrow M$ ein Fundamentalsystem dazu. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \{(\zeta(w), \mathbb{Q}_{\text{abs}}(w)) \mid w \text{ doppeltpunktfreier Weg aus } \mathring{W}(M_\nu)\} = \\ & = \{((\zeta(v_1))^p \cdot (\zeta(v_2))^q, (p \cdot \mathbb{Q}_{\text{abs}}(v_1) + q \cdot \mathbb{Q}_{\text{abs}}(v_2))) \\ & \quad \mid p, q \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(p, q) = 1\} \cup \{(1, 2\pi), (1, -2\pi)\} \end{aligned}$$

Beweis: Auf einem Torus besitzen genau die nicht-trivialen Homotopieklassen $p \cdot [v_1] + q \cdot [v_2]$ mit $\text{ggT}(p, q) = 1$ doppeltpunktfreie Repräsentanten. Da nach Voraussetzung v_1, v_2 und w auch das Doppeltpunktfreiheitskriterium 3.17 erfüllen, impliziert $[w] = p \cdot [v_1] +$

$q \cdot [v_2]$ nach 3.17(i)/3.18/3.19 eine analoge Beziehung für den geschlossenen Umlaufwinkel. Analog determiniert (auch ohne Doppelpunktfreiheitsvoraussetzungen) nach 2.8 die Homotopie von w dessen Vergrößerungsfaktor. Zu dem Beitrag nullhomotoper Wege w zu der Menge (1) vergleiche 3.20.

4.6 Satz: Seien M_1, M_2 zwei nicht strukturerhaltend homöomorphe echte Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung. Dann stimmen die in 4.5(1) gebildeten Mengen für M_1 und M_2 nicht überein.

Beweis: Sei $M' = \tilde{C}^*/H$ ein $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Torus, sodaß nach A.2.15 $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(M')$ die Standarddarstellung eines echten Ähnlichkeitstorus ist. Der Beweis beruht darauf, zu zeigen, daß sich aus der in 4.5(1) genannten Menge die Gruppe H rekonstruieren läßt. H ist ja nach 1.19(ii) einerseits die Holonomie $\hbar(M')$ und andererseits werden durch diese Gruppen nach 3.23 die echten Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung klassifiziert. Somit folgt aus der Rekonstruierbarkeit von $H = \hbar(M)$ aus der in 4.5(1) genannten Mengen, die wir anschließend beweisen, die Behauptung dieses Satzes:

Nach 3.23(1) besteht folgender Zusammenhang zwischen H und den in M gebildeten Umlaufwinkeln und Vergrößerungsfaktoren:

$$(1) \quad \hbar(M') = \{(\text{Exp}(\ln(\zeta(w)) + i \cdot \otimes(w)) \mid w \in \overset{\circ}{\mathcal{W}}(M), w \text{ ist nicht nullhomotop und erfüllt das Doppelpunktfreiheitskriterium 3.17}\} \cup \{(1, 0) \in \tilde{C}^*\}$$

Da die Fundamentalgruppe des Torus bereits durch solche Homotopieklassen erzeugt werden kann, in denen es doppelpunktfreie Wege gibt, kann auch $\hbar(M')$ wie folgt als Erzeugnis dargestellt werden:

$$(2) \quad \hbar(M') = \left\langle \{(\text{Exp}(\ln(\zeta(w)) + i \cdot \otimes(w)) \mid w \text{ ist nicht nullhomotop und doppelpunktfreier Weg aus } \overset{\circ}{\mathcal{W}}(M)\} \right\rangle$$

Angenommen, in M existiert ein doppelpunktfreier nicht nullhomotoper Weg w_1 mit $\otimes_{\text{abs}}(w_1) = 2\pi$ und $\zeta(w_1) = 1$. Da er den Torus zu einem Kreisring aufschneidet, können wir einen Weg w_2 finden, sodaß w_1, w_2 ein Fundamentalsystem des Torus bilden. Da ja $\hbar(w_1) = (1, 0) \in \tilde{C}^*$ ist und die Erzeugenden von $\hbar(M')$ nach A.2.15 nicht reelle Potenz voneinander sein können, ist $\zeta(w_2) = |\text{Cpl}(\hbar(w_2))| \neq 1$. Von daher ist auch $\zeta(w_1 \cdot w_2) \neq 1$. Wenn wir also in der Homotopieklassse $[w_1 \cdot w_2]$ einen Weg w_3 wählen, sodaß w_2, w_3 ein Fundamentalsystem unseres Torus ist, so bildet $\{\hbar(w_2), \hbar(w_3)\}$ ein Erzeugendensystem dieser Holonomiegruppe, bei dem keines der beiden Elemente $= (1, 2\pi) \in \tilde{C}^*$ ist. Die Existenz eines solchen Erzeugendensystems ist also in jedem Fall gesichert. Wir können die Werte $(1, \pm 2\pi) \in \tilde{C}^*$ somit, falls sie in dem in (1) betrachteten Erzeugendensystem liegen, in jedem Fall entfernen ohne das Erzeugnis zu verkleinern und erhalten:

$$(3) \quad \hbar(M') = \left\langle \{(\text{Exp}(\ln(\zeta(w)) + i \cdot \otimes(w)) \mid w \text{ ist doppelpunktfreier Weg aus } \overset{\circ}{\mathcal{W}}(M) - \{(1, \pm 2\pi) \in \tilde{C}^*\}\} \right\rangle$$

Bei der Darstellung von $\hbar(M')$ nach (3) wird die Bedingung “ w nullhomotop” im Gegensatz zu (2) überflüssig, da auf den doppeltpunktfreien nullhomotopen Wegen nach 3.20 ohnehin nur die Werte $(1, \pm 2\pi)$ angenommen werden. Da das Erzeugendensystem bei (3) aus der in 4.5(1) genannten Menge kanonisch abgeleitet werden konnte, ist mit dem im ersten Absatz Ausgeführten der Beweis erbracht. $\square$

4.7 Bemerkung: Wegen 4.4(i) kann die in 4.5(1) genannte Menge aber in keinem Fall zwei euklidische Ähnlichkeitstori unterscheiden.

4.8 Lemma: *Nachfolgende, im Vergleich zu 4.5(1) leichter zugängliche Charakteristika reichen dagegen nicht aus, die echten Ähnlichkeitstori zu unterscheiden, denn für jeden der Fälle (i)–(iii) lassen sich zwei nicht strukturerhaltend homöomorphe echte Ähnlichkeitstori M_1, M_2 angeben, sodaß das jeweils betrachtete Charakteristikum von M_1 und M_2 dennoch übereinstimmt ($\nu \in \{1, 2\}$):*

$$(i) \quad \{(\zeta(w), \oplus_{\text{rel}}(w)) \mid w \text{ doppeltpunktfreier Weg aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\}$$

$$(ii) \quad \{(\zeta(w), \oplus_{\text{abs}}(w)) \mid w \in \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\}$$

$$(iii) \quad \begin{aligned} &\{\zeta(w) \mid w \text{ doppeltpunktfreier Weg aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\} \\ &\text{und } \{\oplus_{\text{abs}}(w) \mid w \text{ doppeltpunktfreier Weg aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\} \end{aligned}$$

Beweis durch Angabe der Beispiele:

$$(i): \quad \text{Sei } H_1 := \langle (2, 0), (1, 2\pi) \rangle \subset \tilde{C}^* \quad \text{und } H_2 := \langle (2, 0), (1, 4\pi) \rangle \subset \tilde{C}^*.$$

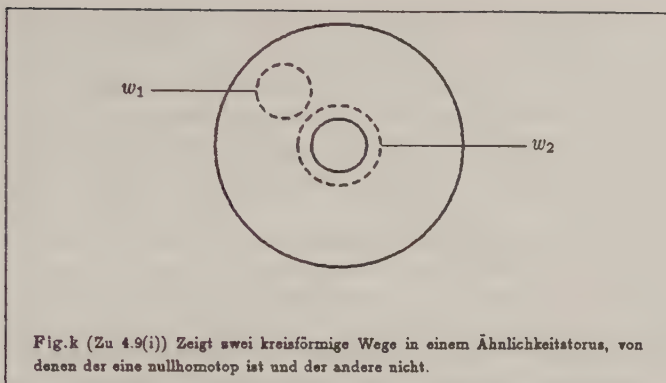
Mit $\nu \in \{1, 2\}$ definieren wir so $M_\nu = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H_\nu)$ als echte Ähnlichkeitstori im Sinne ihrer Standarddarstellung A.2.15. Nach der Klassifikation dieser Tori 3.23/3.24 sind somit M_1 und M_2 nicht strukturgleich, denn $H_1 \neq H_2$. Auf beiden Tori führen wir ein Fundamentalsystem $\{v_1, v_2\}$ wie in A.2.18(i) ein, wobei wir $S_1 := (2, 0)$, und $S_2 := (1, 4\pi)$ setzen. Auf diesem Fundamentalsystem entstehen damit nach 2.4 und 3.21(ii) die folgenden Umlaufwinkelwerte und Vergrößerungsfaktoren:

$$(1) \quad \begin{aligned} \zeta(v_1) &= 2 & \zeta(v_2) &= 1 \\ \oplus_{\text{abs}}(v_1) &= 0 & \oplus_{\text{abs}}(v_2) &= 2\pi \text{ oder } 4\pi \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werte dann in die Gleichung 4.5(1) ein, so erhalten wir als Charakteristikum (i) (bei dem die Umlaufwinkelkomponente ja nur modulo 2π betrachtet wird) sowohl für M_1 , als auch für M_2 :

$$\{(2^k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(ii) : Wir benutzen dasselbe Beispiel wie bei (i). Das Charakteristikum (ii) für M_1 und M_2 errechnen wir, indem wir die Formeln (1) in 4.2(1) einsetzen, und bedenken, daß sich allein mit Hilfe des r -Koeffizienten, der ja keinen Einfluß auf die Homotopieklasse des



Weges hat, sicherstellen läßt, daß jeder Vergrößerungsfaktor aus der Holonomiegruppe mit jedem Vielfachen von 2π gepaart werden kann. Somit entsteht sowohl für M_1 als auch für M_2 folgendes Charakteristikum (ii):

$$\{(2^k, 2\pi \cdot m) \mid k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}\}.$$

(iii) : Seien

$$\begin{aligned} H_1 &:= \langle \text{Exp}(1), \text{Exp}(i) \rangle = \{ \text{Exp}(p + i \cdot q) \mid p, q \in \mathbb{Z} \} \\ H_2 &:= \langle \text{Exp}(1 + i), \text{Exp}(1 - i) \rangle = \{ \text{Exp}(p + i \cdot q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, \\ &\quad p, q \text{ beide gerade oder beide ungerade} \}. \end{aligned}$$

(2)

Für $\nu \in \{1, 2\}$ definieren wir analog zu (i) $M_\nu := \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^*/H_\nu)$, folgern aus $H_1 \neq H_2$, daß auch M_1 nicht strukturgleich zu M_2 ist und können aus den in (2) genannten Erzeugenden der Gruppen H_ν die Charakteristika 4.5(1) unserer beiden Mannigfaltigkeiten berechnen. Es entsteht:

$$\begin{aligned} \{(\zeta(w), \otimes_{\text{abs}}(w)) \mid w \text{ doppeltpunktfrei aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\} &= \\ = \begin{cases} \{(e^p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, \text{ggT}(p, q) = 1\} \cup \{(1, 2\pi), (1, -2\pi)\} & \text{für } \nu = 1 \\ \{(e^p, q) \mid p, q \in \mathbb{Z}, p, q \text{ beide gerade oder beide ungerade,} \\ \text{ggT}(\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}) = 1\} \cup \{(1, 2\pi), (1, -2\pi)\} & \text{für } \nu = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Das Charakteristikum (iii) entsteht aus den eben genannten Mengen dann durch Projektion auf die erste und zweite Komponente. Trotz der ggT-Bedingungen entsteht dabei sowohl für $\nu=1$, als auch für $\nu=2$:

$$\begin{aligned} \{\zeta(w) \mid w \text{ doppeltpunktfrei aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\} &= \{e^p \mid p \in \mathbb{Z}\}, \\ \{\otimes_{\text{abs}}(w) \mid w \text{ doppeltpunktfrei aus } \mathring{\mathcal{W}}(M_\nu)\} &= \{q \mid q \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-2\pi, +2\pi)\}. \quad \square \end{aligned}$$

4.9 Bemerkung:

- (i) Es gibt echte Ähnlichkeitstori, bei denen die regulären Umgebungen zweier nicht homotoper Wege strukturerhaltend homöomorph aufeinander abgebildet werden können.
- (ii) Es gibt aber auch echte Ähnlichkeitstori, bei denen die Homotopieklasse jedes Weges durch die Geometrie in einer regulären Umgebung determiniert ist.

Beweis von (i): Fig.k zeigt einen Torus, der analog entsteht, wie der in A.2.7(Fig.c) dargestellte. Die darin (gestrichelt) eingezeichneten Wege w_1 und w_2 erfüllen die Behauptung.

Zu (ii): Sei $\{v_1, v_2\}$ das Fundamentalsystem eines Ähnlichkeitstorus M . Nach 2.8 ist damit $\zeta(w) = \zeta(v_1)^p \cdot \zeta(v_2)^q$, wenn für die Homotopieklassen der Wege $[w] = p \cdot [v_1] + q \cdot [v_2]$ gilt. Sind dann $\ln(\zeta(v_1))$ und $\ln(\zeta(v_2))$ linear unabhängig in $\mathbb{R}$ (aufgefaßt als Vektorraum über $\mathbb{Q}$) so kann aus dem Vergrößerungsfaktor auf die Koeffizienten p, q und damit auf seine Homotopieklasse zurückgeschlossen werden. Der Vergrößerungsfaktor ist nach A.3.5(v)/2.2/2.3 eine geometrische Größe, die bereits durch eine reguläre Umgebung zu determinieren ist.

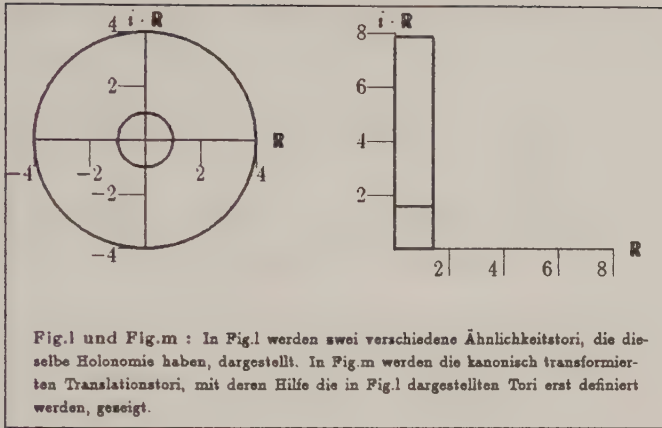
Da die Fundamentalgruppe des Torus abelsch ist, ist der Bezug zweier zu verschiedenen Aufpunkten gebildeten Fundamentalgruppen daher eindeutig. Die Aussage (ii) gilt daher unabhängig davon, ob die betrachteten Wege durch den Aufpunkt gehen oder nicht. $\square$

§5: Fundamentalbereiche der Ähnlichkeitstori

Bereits in A.2.5 hatten wir erklärt, was wir unter dem “Fundamentalebereich einer strukturierten Mannigfaltigkeit” verstehen. Demgegenüber stellen wir jetzt den Begriff des “Fundamentalebereichs einer auf einer Mannigfaltigkeit operierenden Gruppe”:

5.1 Definition: Sei H eine auf X eigentlich diskontinuierlich und frei operierende Gruppe. Dann heißt eine nach X eingebettete (abgeschlossene) Zelle “Fundamentalebereich von H ”, falls B_0 mindestens einen Punkt jedes Orbits von H enthält, und jeder Orbit von H , der in B vertreten wird, nur einen Repräsentanten in B hat.

5.2 Zielbestimmung und Bemerkung: In diesem Paragraphen gilt es zu zeigen, daß alle in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori Fundamentalebereiche im Sinne von A.2.5 haben. Da sich aus den Definitionen A.2.5/5.1 sofort ergibt, daß, falls H eigentlich diskontinuierlich und frei auf X operiert, ein Fundamentalebereich von H auch ein Fundamentalebereich von X/H ist, ergibt sich für die euklidischen Ähnlichkeitstori nach A.2.4 recht unmittelbar, daß sie alle parallelogrammförmige Fundamentalebereiche haben: Die Darstellung der euklidischen Ähnlichkeitstori durch Fundamentalebereiche haben wir uns ja schließlich bereits in A.2.6 klargemacht. Für die echten Ähnlichkeitstori ist eine entsprechende Aussage nicht so leicht abzuleiten. Wenn wir ein solches M gemäß A.2.15 als $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ darstellen, so hat zwar der $(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)$ -Torus $\tilde{C}^*/H$ einen Fundamentalebereich B , nämlich zumindest das Bild unter Exp des parallelogrammförmigen Fundamentalebereichs des Translationstorus $\mathbb{C}/\text{Log}(H)$. Durch diese Konstruktion würde aber erst dann ein Fundamentalebereich für $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H) = M$ gefunden, wenn Cpl_B injektiv wäre. Daß dies nicht unbedingt so sein muß, zeigen Fig.l und Fig.m.



In diesem Paragraphen wollen wir dennoch die Existenz von Fundamentalbereichen für alle echten Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung zeigen und dabei im Prinzip schon dem eben skizzierten Konstruktionsschema folgen; wir werden allerdings bereits auf dem Niveau der Translationstori (präziser: bereits auf dem Niveau einer affinen Verzerrung der Translationstori) einen Fundamentalbereich so sorgfältig wählen, daß er am Ende durch Cpl injektiv zu einem Fundamentalbereich für $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^*/H)$ eingebettet werden kann. Dies zeigen wir im folgenden schrittweise, indem wir die Behauptungen 5.3–5.6 verifizieren:

5.3 Behauptung: Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^*/H)$ ein echter Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung. Dann existiert ein Fundamentalbereich von M , falls das Gitter $\text{Log}(H)$ einen Fundamentalbereich hat, der innerhalb des Streifens

$$(1) \quad s_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < \pi\}$$

liegt.

Beweis: s_0 ist ein Injektivitätsbereich von $\exp$. Ein Fundamentalbereich, wie in dieser Behauptung vorausgesetzt, wird durch $\exp$ auf einen Fundamentalbereich von H bzw. $\tilde{\mathbb{C}}^*/H$ abgebildet. Der so entstehende Fundamentalbereich wird durch Cpl anschließend injektiv nach $\mathbb{C}$ eingebettet, denn $\text{Cpl} \circ \exp = \exp$ nach A.2.8(i)/A.2.8(iv) (vgl. 5.2).

5.4 Behauptung: Sei M wie in 5.3. Ein Fundamentalbereich von M existiert, wenn die auf $\mathbb{R}^2$ additiv operierende Gruppe $\mathbb{Z}^2$ einen Fundamentalbereich in jedem Streifen

$$(1) \quad s := \{\lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot w \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, |\lambda_2| < \varepsilon\}$$

hat, wobei $\{v, w\}$ die Orthonormalbasen des $\mathbb{R}^2$ durchläuft.

Beweis: Seien $a_1 + i \cdot b_1$, $a_2 + i \cdot b_2$ Erzeugende des Gitters $\text{Log}(H)$ und $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ die durch die Matrix $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ i \cdot b_1 & i \cdot b_2 \end{pmatrix}$ gegebene reelle lineare Abbildung. $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z)| < \pi\})$

ist ein Streifen s wie in (1). Da f also einen innerhalb von s gelegenen Fundamentalbereich auf einen abbildet, der den Voraussetzungen von Behauptung 5.3 genügt, folgt 5.4.

5.5 Behauptung: Die Behauptung 5.4 gilt bereits unter der abgeschwächten Voraussetzung, daß $\mathbb{Z}^2$ Fundamentalbereiche in allen Streifen s hat, bei denen der Quotient der v -Komponenten $\frac{v_1}{v_2}$ irrational ist.

Beweis: Man ersetzt s_0 durch den gegenüber s_0 ein wenig gescherten Streifen

$$(1) \quad s_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |\Im(z) - \beta \cdot \Re(z)| < \pi\},$$

wobei β als kleine reelle Zahl so gewählt wird, daß $f^{-1}(1+i\beta)/\|f^{-1}(1+i\beta)\|$ die in dieser Behauptung genannte Irrationalitätsbedingung erfüllt. Da auch s_1 ein Injektivitätsbereich von $\exp$ ist, ergibt sich Behauptung 5.5 analog wie 5.4/5.3.

5.6 Behauptung: Die auf $\mathbb{R}^2$ operierende Gruppe $\mathbb{Z}^2$ hat einen Fundamentalbereich in jedem gemäß 5.4(1) definierten Streifen s , der die Irrationalitätsbedingung von Behauptung 5.5 erfüllt.

Beweis: Wir entwickeln die irrationale Zahl $\frac{v_1}{v_2}$ in einen Kettenbruch. Dies definiert uns Konvergenten A_m, B_m (vgl. [Dav].IV.6.(16)), sodaß der Bruch $\frac{A_m}{B_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \frac{v_1}{v_2}$. Es gilt dann, Konvergenten zu finden, sodaß die Punkte (A_m, B_m) in dem Streifen s liegen. D.h. es muß das Skalarprodukt $|(A_m, B_m) \cdot w| = |A_m \cdot -v_2 + B_m \cdot v_1| < \varepsilon$ sein bzw. $|\frac{v_1}{v_2} - \frac{A_m}{B_m}| < \frac{\varepsilon}{B_m \cdot v_2}$. Da nach [Dav].IV.4(12) $\frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1}}{B_{m-1} \cdot B_m}$ ist und somit die Werte $\frac{A_m}{B_m}$ um den Grenzwert $\frac{v_1}{v_2}$ alternieren und da die B_m nach [Dav].IV.4(9) eine monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen sind, ist dies für genügend große m erfüllt. Sei also ab jetzt m fest so gewählt, daß $(A_m, B_m) \in s$ und $(A_{m+1}, B_{m+1}) \in s$. Daß damit auch $(A_m + A_{m+1}, B_m + B_{m+1}) \in s$ gilt, läßt sich anhand der Basisentwicklung von (A_m, B_m) und (A_{m+1}, B_{m+1}) nach $\{v, w\}$ erkennen. Wegen der Konvexität von s ist somit das gesamte von den Punkten $(0, 0)$, (A_m, B_m) , $(A_m + A_{m+1}, B_m + B_{m+1})$ und (A_{m+1}, B_{m+1}) aufgespannte Parallelogramm in s . Da nach [Dav].IV.4(10) $\det \begin{pmatrix} A_m & A_{m+1} \\ B_m & B_{m+1} \end{pmatrix} = \pm 1$ ist, also jenes Parallelogramm das Bild des Einheitsquadrats $[0, 1] \times [0, 1]$ unter einer gegen $\mathbb{Z}^2$ invarianten linearen Abbildung ist, ist es ein Fundamentalbereich im Sinne der Behauptung dieses Lemmas. $\square$

Wie in 5.3–5.6 für echte Ähnlichkeitstori gezeigt, und in Bemerkung 5.2 für euklidische Ähnlichkeitstori begründet, gilt:

5.7 Satz: Alle in Standarddarstellung A.2.4/A.2.15 gegebenen Ähnlichkeitstori haben Fundamentalbereiche.

Abschnitt C : Die Hilfsmittel bei der Klassifikation wohlstrukturierter Mannigfaltigkeiten im metrischen Fall

0.1 Zielbestimmung: In Einl.0.4 haben wir besprochen, daß wir die Klassifikation der zweidimensionalen orientierten Mannigfaltigkeiten dadurch erreichen wollen, daß wir zuerst eine Klassifikation bestimmter (G, X) -strukturierter Mannigfaltigkeiten vornehmen (wobei G eine Gruppe von Isometrien ist) und aus gewissen Verwandtschaften zwischen dem Operieren bestimmter Gruppen von Isometrien G zu $\text{Aut}(\mathbb{C})$ erst auf die Klassifikation $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierter Mannigfaltigkeiten schließen. Dies geschieht im wesentlichen erst im nachfolgenden Abschnitt D. Ziel von Abschnitt C ist es lediglich, die wichtigsten Begriffe und Hilfsmittel, die einem für den Fall, daß G eine Gruppe von Isometrien ist, mitunter die Klassifikation der geschlossenen (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten erlauben, bereitzustellen. Dies sind im wesentlichen die nachfolgenden Aussagen:

- (i) Bei einer (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeit (auch wenn G keine Gruppe von Isometrien ist) läßt sich jede Koordinatenabbildung zu einem strukturerhaltenden lokalen Homöomorphismus „globale Karte“ fortsetzen, der die universelle Überlagerung der Mannigfaltigkeit in die Grundmannigfaltigkeit abbildet (siehe 2.2).
- (ii) Die Struktur einer (G, X) -Mannigfaltigkeit (auch, wenn G nicht nur aus Isometrien besteht) kann bereits durch einen Atlas beschrieben werden, dessen Übersetzungsabbildungen alle durch Einschränkungen von Abbildungen der Holonomiegruppe entstehen (siehe 2.4(ii)).
- (iii) Besteht die Strukturgruppe G nur aus Isometrien bezüglich einer riemannschen oder zumindest inneren Metrik, so wird die globale Karte einer kompakten Mannigfaltigkeit zu einer Überlagerungsabbildung (siehe 3.1).
- (iv) Sind die globalen Karten zweier nicht-strukturgleicher (G, X) -Mannigfaltigkeiten Überlagerungsabbildungen und ist die Grundmannigfaltigkeit einfach zusammenhängend, so sind die Holonomiegruppen der beiden (G, X) -Mannigfaltigkeiten nicht konjugiert zueinander (siehe 2.9).

Vor allem, um im §3 dieses Abschnitts den Punkt (iii) beweisen zu können, müssen wir zunächst in §1 (vgl. die Bemerkung A.3.5(vi)) uns nunmehr darüber im klaren werden, unter welchen Umständen eine als Isometrien operierende Gruppe G eine induzierte Metrik auf den (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten nach sich zieht, und welche Verträglichkeiten wir von strukturerhaltenden Abbildungen gegenüber einer solchen induzierten Metrik erwarten dürfen.

§1: Die induzierte Metrik bei strukturierten Mannigfaltigkeiten

1.1 Bemerkung zum Begriff der riemannschen Mannigfaltigkeiten:

In der Differentialgeometrie definiert man eine riemannsche Mannigfaltigkeit, indem man auf den Tangentialräumen des Tangentialbündels einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in differenzierbarer Abhängigkeit vom Fußpunkt jeweils ein Skalarprodukt erklärt. Auf die Weise kommt die Geometrie einer riemannschen Mannigfaltigkeit nicht nach dem Prinzip A.3.2 zustande. Wir können von daher keine Pseudogruppe G oder eine Grundmannigfaltigkeit X angeben, sodaß sich jede riemannsche Mannigfaltigkeit zugleich als $(\wp, X)$ -strukturierte Mannigfaltigkeit auffassen ließe. Es gibt lediglich Klassen riemannscher Mannigfaltigkeiten, die bei für die Klasse individuell gewählten X und $\wp$ bzw. G auch als $(\wp, X)$ bzw. (G, X) -strukturierte erzeugt werden können (vgl. 1.2):

1.2 Die Geometrie derjenigen (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten, bei denen G eine Gruppe von Isometrien gegenüber einer riemannschen Metrik von X ist.

Sei X eine riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine auf X operierende Gruppe, die invariant gegenüber dem lokalen Skalarprodukt ist. Dann wird auf allen (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten entsprechend dem Prinzip A.3.2 ein lokales Skalarprodukt und damit die Struktur einer riemannschen Mannigfaltigkeit erklärt. Auf solchen Mannigfaltigkeiten können von daher Winkel und Längen gemessen und Geodäten betrachtet werden, letztere Begriffe werden dann also aufbauend auf dem gemäß Prinzip A.3.2 induzierten Skalarprodukt wie in der Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten üblich erklärt, d.h. die Begriffe werden wie in A.3.4(ii) erklärt. Daß man jedoch dieselben Geodäten und Winkel erhalten würde, wenn man das Prinzip A.3.2/A.3.4(i) auf die direkt auf der Grundmannigfaltigkeit X definierten Winkel bzw. geodätische Segmente anwenden würde, zeigt das Lemma 1.6. Auf den so zu riemannschen Mannigfaltigkeiten gewordenen (G, X) -Mannigfaltigkeiten ist dann nach A.3.4(ii) jeweils auch eine riemannsche Metrik erklärt: nämlich durch das Infimum der Längen, die man allen differenzierbaren Verbindungswegen zuordnen kann.

1.3 Bemerkung: Die Definition 1.2 beschreibt also eine Möglichkeit, beim Vorliegen bestimmter (G, X) -Strukturen auf den (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten induzierte Metriken messen zu können. Dieses Definitionsprinzip deckt auch alle in dieser Arbeit auftretenden Situationen ab. Wir möchten es aber nicht unterlassen, festzuhalten, daß in diesem Lemma wesentlich mehr vorausgesetzt wird, als man essentiell braucht, um auf strukturierten Mannigfaltigkeiten induzierte Metriken zu erhalten. Die Existenz solcher Metriken ist unter Umständen bereits durch das Operieren allein von Pseudogruppen gesichert, außerdem besteht keine Notwendigkeit, eine zugrundeliegende und mit der Metrik verträgliche differenzierbare Struktur zu fordern, wie das ja bei dem Begriff der riemannschen Metrik der Fall ist. Dies ist unabhängig von den Mechanismen, die für das Zustandekommen von induzierten Metriken letztlich nur verantwortlich sind. Trotzdem ist die in 1.2 beschriebene Situation das Vorbild für die auf $(\wp, X)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten zu erklärenden Metriken, aber nur, was einen Teilaspekt der dort beschriebenen Situation angeht: Nämlich den, daß auf der Grundmannigfaltigkeit ein Weglängenbegriff gegeben ist, demgegenüber die Pseudogruppe $\wp$ oder die Strukturgruppe G invariant operiert, und daß der Abstand zwischen zwei Punkten durch das Infimum der Längen aller möglichen Verbindungswege erklärt wird.

In der Theorie der metrischen Räume wird die Situation, daß Metriken nach diesem Prinzip zustande kommen, untersucht. Zum Ausgangspunkt der Überlegungen wählt man dort einen Raum X , auf dem eine Metrik ρ_X gegeben ist. Anschließend versucht man, allen Wegen $w : [a, b] \rightarrow M$ dadurch Weglängen ℓ_X zuzuordnen, daß man Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$ betrachtet, dazu die Summe der Abstände der Zerlegungspunkte $\sum_{i=1}^n \rho(w(t_i), w(t_{i-1}))$ bildet und dann das Supremum über alle Zerlegungen davon als (endliche oder unendliche) Weglänge definiert [Rinow].IV.§12.1.–12. Ist die zu betrachtende Mannigfaltigkeit nicht nur zusammenhängend (vgl. A.1.1) sondern sogar "finit bogenverknüpft" im Sinne von [Rinow].IV.§15 (was eine Nichtentartungs-Forderung an die Metrik darstellt), so kann neben der ursprünglich gegebenen Metrik ρ_X noch ein innerer Abstand ρ_i durch das Infimum der Weglängen der Verbindungswege erklärt werden ([Rinow].IV.§15.3.). Stimmt der so definierte innere Abstand ρ_i mit dem ursprünglich gegebenen Abstandsbegriff ρ_X überein, so nennt man

(*) (X, ρ_X) einen Raum mit innerer Metrik.

([Rinow].§15.7.). Analog zu 1.2 erhalten wir somit:

Ist (X, ρ_X) eine Grundmannigfaltigkeit mit innerer Metrik und

(i) $\wp$ eine Pseudogruppe lokal definierter isometrisch operierender Homöomorphismen oder

(ii) G eine quasianalytisch auf X operierende Gruppe von Isometrien, so entsteht auf jeder $(\wp, X)$ - bzw. (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeit M gemäß Prinzip A.3.2 zunächst einmal ein Weglängenbegriff ℓ_M , denn entsprechend der Definition von ℓ_X operieren die Abbildungen aus $\wp$ bzw. G auch invariant gegenüber ℓ_X . Mit Hilfe von ℓ_M wird dann auf jeder so strukturierten Mannigfaltigkeit M gemäß Prinzip A.3.4(ii) vermittels

(1) $\rho_M(z, y) := \inf \{ \ell_M(w) \mid w : [a, b] \rightarrow M \text{ ist rektifizierbarer Weg} \}$
mit $w(a) = z$ und $w(b) = y$

eine Metrik erklärt, die automatisch eine innere Metrik ist.

1.4 Korollar: Als unmittelbare Folge der Definition einer inneren Metrik ρ auf einer Mannigfaltigkeit X (vgl. 1.3) ergeben sich folgende Aussagen:

(i) $U(x, \varepsilon) = \{y \mid \text{Es existiert ein Weg } w : [a, b] \rightarrow M \text{ mit } \ell(w) < \varepsilon, w(a) = x, w(b) = y\}$.

(ii) Alle Umgebungen des Typs $U(x, \varepsilon)$ sind wegweise zusammenhängend.

(iii) Seien $P_1, P_2 \in X$. Dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $Q \in X$, sodaß $\rho(P_j, Q) < \frac{\rho(P_1, P_2)}{2} + \varepsilon$ ist für $j \in \{1, 2\}$.

1.5 Lemma: Seien $\wp, X$ und ρ wie im vorangegangenen Punkt.

(i) Dann operieren alle $(\wp, X)$ -strukturierhaltenden Abbildungen invariant gegenüber dem Weglängenbegriff.

(ii) Alle $(\wp, X)$ -strukturierhaltenden Abbildungen sind lokale Isometrien.

(iii) Für alle $\varepsilon > 0$ bildet jede $(\wp, X)$ -strukturierhaltende Überlagerung f eine Umgebung $U(x, \varepsilon)$ surjektiv auf die Umgebung $U(f(x), \varepsilon)$ ab.

(iv) Unter denselben Voraussetzungen wie in (iii) gilt für alle $x \in M$ und alle $\varepsilon > 0$:

$$f^{-1}(U(x, \varepsilon)) = \bigcup_{\tilde{x} \in f^{-1}(\{x\})} (U(\tilde{x}, \varepsilon))$$

(v) Alle (φ, X) -strukturerehaltenden Homöomorphismen sind Isometrien.

Beweis von (i) und (ii): Sei $f : M \rightarrow N$ strukturerehaltend und $P \in M$. Nach A.1.8 und wegen der Maximalität des Atlases N gemäß A.1.9(i) können wir Umgebungen $U \subset M$, $V \subset N$ angeben, sodaß $f|_U : U \rightarrow V$ homöomorph ist und (V, ϕ) eine (φ, X) -Karte von N . Da somit nach Prinzip A.3.2 sowohl die Koordinatenabbildung ϕ als auch die Koordinatenabbildung $\phi \circ f|_U$ invariant gegenüber dem Weglängenbegriff operieren, gilt dies auch für f (womit (i) bewiesen wäre.) ε werde dann so gewählt, daß $(U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon) \subset \phi(V)$ ist. Seien $Q_1, Q_2 \in U(\phi(f(P)), \varepsilon)$. Wenn wir den Abstand von Q_1 nach Q_2 bestimmen wollen, so stellt sich folgende Situation: Diejenigen Wege von Q_1 nach Q_2 , die nicht innerhalb von $U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon)$ bleiben, enthalten zwei Segmente, deren Länge mindestens ε ist, nämlich eines zwischen Q_1 und ihrem ersten Schnittpunkt mit $\partial U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon)$ und ein zweites zwischen ihrem letzten Schnittpunkt mit $\partial U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon)$ und Q_2 . Damit sind diese Wege für die Abstandsmessung zwischen Q_1 und Q_2 irrelevant, denn innerhalb von $U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon)$ muß es ja Wege geben, die kürzer als $2 \cdot \varepsilon$ sind. Dieselbe Situation stellt sich ein, wenn es gilt, die Abstände zwischen $\phi^{-1}(Q_1)$ und $\phi^{-1}(Q_2)$ bzw. zwischen $(f|_U)^{-1}(\phi^{-1}(Q_1))$ und $(f|_U)^{-1}(\phi^{-1}(Q_2))$ zu messen. Die Invarianz von $(f|_U)$ und ϕ gegenüber Weglängen garantiert so, daß $f|_{((f|_U)^{-1}(\phi^{-1}(U(\phi(f(P)), 2 \cdot \varepsilon))))}$ eine Isometrie ist.

Zu (iii): Das Urbild zu einem Punkt $y \in U(f(x), \varepsilon)$ konstruiert man bei Darstellung dieser Umgebung wie in 1.4(i) durch Liftung des Verbindungsweges zwischen $f(x)$ und y . Nach (i) ist diese Liftung invariant gegenüber Weglängen.

Zu (iv): Sei $y \in f^{-1}(U(x, \varepsilon))$. Dann läßt sich $f(y)$ mit x durch einen Weg w mit $\ell(w) < \varepsilon$ in M verbinden. w läßt sich ab y zu einem Weg $\tilde{w}$ liften, dessen Endpunkt ein Punkt aus $f^{-1}(\{x\})$ sein muß. Nach (i) ist $\ell(\tilde{w}) < \varepsilon$. Von daher gilt $f^{-1}(U(x, \varepsilon)) \subset \bigcup_{\tilde{x} \in f^{-1}(\{x\})} (U(\tilde{x}, \varepsilon))$. Die umgekehrte Inklusion folgt nach (iii).

Zu (v): Ergibt sich aus dem Umstand, daß nach (i) ein strukturerehaltender Homöomorphismus sicherstellt, daß jedem Verbindungsweg aus dem Urbild/Bild genau ein gleichlanger Verbindungsweg aus dem Bild/Urbild entspricht. $\square$

1.6 Lemma: Sei X eine riemannsche Mannigfaltigkeit und G eine Transformationsgruppe, die invariant gegenüber der riemannschen Struktur von X induzierenden lokalen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ operiert. Seien $M, M' (G, X)$ -strukturierte Mannigfaltigkeiten, $P \in M$ und $v, w \in T_P(M)$ Tangentialvektoren an M . Mit $d_P f$ werde das Differential einer Funktion f am Punkt P bezeichnet. Dann gilt für jede (G, X) -strukturerehaltende Abbildung $f : M \rightarrow M'$:

- (i) f operiert invariant gegenüber den lokalen Skalarprodukten von M bzw. M' , d.h. es ist $\langle v, w \rangle_M = \langle d_P f(v), d_P f(w) \rangle_{M'}$.
- (ii) f operiert invariant gegenüber dem Winkelbegriff, d.h. es gilt $\angle(v, w) = \angle(d_P f(v), d_P f(w))$.

(iii) f ist eine lokale Isometrie.

(iv) f bildet Geodäten auf Geodäten ab.

Beweis: Sei (U, ϕ) eine $f(P)$ überdeckende Karte. Da nach A.1.8 die Verkettung von ϕ und einer geeigneten Restriktion von f eine Koordinatenabbildung von M ist und da $\langle \cdot, \cdot \rangle_M$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_{M'}$ mit Hilfe von Koordinatenabbildungen aus $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ entstehen, ergibt sich $\langle v, w \rangle_M = \langle ((d_{f(P)}\phi) \circ (d_P f))(v), ((d_{f(P)}\phi) \circ (d_P f))(w) \rangle_X = \langle (d_P f)(v), (d_P f)(w) \rangle_{M'}$ und somit die Aussage (i). Da die Winkel in riemannschen Mannigfaltigkeiten allein mit Hilfe des lokalen Skalarprodukts definiert werden, ist (ii) eine unmittelbare Folgerung aus (i). Die Aussage (iii) ist gemäß 1.3 nur ein Sonderfall von 1.5(ii). Weil in der Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten Geodäten als die lokal kürzesten Verbindungen charakterisiert werden können, ergibt sich schließlich (iv) aus (iii). $\square$

1.7 Bemerkung: Eine auf einer Grundmannigfaltigkeit X , die zugleich eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist, operierende Gruppe von Isometrien ist stets quasianalytisch. Von daher ist diese Forderung bei der Definition der Strukturtypen gemäß 1.2 verzichtbar, ohne daß Wohldefiniertheitsprobleme mit A.1.9(ii) entstehen.

Beweis: Daß mit Operieren einer solchen strukturerhaltenden Abbildung auf einer offenen Umgebung das Abbildungsverhalten für jeden anderen Punkt determiniert ist, ergibt sich daraus, daß aufgrund der Invarianzeigenschaften 1.6(iv)/1.5(i)/1.6(ii) das Abbildungsverhalten in der regulären Umgebung jedes von der erstgenannten Umgebung ausgehenden Polygonzugs determiniert ist. $\square$

1.8 Bemerkung: Nicht jede Metrik ist eine innere, denn die Eigenschaft 1.4(iii) wird z.B. von der Metrik ρ' verletzt, die sich wie folgt mit Hilfe der euklidischen Metrik ρ definieren läßt:

$$\rho'(P, Q) := \min\{\rho(P, Q), 1\}.$$

In diesem Fall ist freilich $\rho'_i = \rho$ und somit die von der inneren Metrik induzierte Topologie gleich der ursprünglich gegebenen. Leider ist dies im allgemeinen Fall nicht notwendigerweise so (vgl. [Rinow].IV.§15/15.4.).

1.9 Bemerkung: Die euklidische Metrik auf dem $\mathbb{R}^n$, insbesondere auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ ist der Sonderfall einer riemannschen Metrik. Von daher können, wie in 1.2 ausgeführt, auf den $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ - und $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten Metriken gemessen werden, die die in 1.4, 1.5 und 1.6 aufgelisteten Eigenschaften erfüllen. Der zugrundeliegende Weglängenbegriff ist dabei der in der euklidischen Geometrie übliche, d.h. die Länge eines zumindest stückweise differenzierbaren Weges $w : [a, b] \rightarrow M$ wird wie folgt gemessen:

$$(1) \quad \ell(w) = \int_a^b \|w'(t)\| dt.$$

§2: Globale Karten und WST-Vollständigkeit

2.1 Definition der und Eindeutigkeitsaussage für die globale Karte:

- (i) Sei M eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit und $\widetilde{M}$ die universelle Überlagerung von M , strukturiert wie in A.2.17(ii). Als "globale Karte von M " bezeichnen wir dann jede strukturerhaltende Abbildung

$$\Phi: \widetilde{M} \rightarrow X.$$

- (ii) Seien Φ, Φ' globale Karten im Sinne von (i). Dann existiert $g \in G$, sodaß $g \circ \Phi = \Phi'$ ist. D.h. je zwei globale Karten derselben Mannigfaltigkeit unterscheiden sich nur um eine Operation der Strukturgruppe.

Beweis von (ii): Da Φ und Φ' als strukturerhaltende Abbildungen gemäß A.1.8 lokale Homöomorphismen sind, existiert mit $V \subset^{\text{offen}} \widetilde{M}$ ein gemeinsamer Injektivitätsbereich von Φ und Φ' . Weil $\Phi|_V$ und $\Phi'|_V$ wegen A.1.8 und A.2.11(i) als Koordinatenabbildungen eines (G, X) -Atlas von $\widetilde{M}$ aufgefaßt werden können, kann die Übersetzungsabbildung $(\Phi'|_V) \circ (\Phi|_V)^{-1}$ nach A.1.6(ii)/A.1.4 zu einer Operation $g \in G$ fortgesetzt werden. Es gilt damit zumindest $(g \circ \Phi)(x) = \Phi'(x)$ für alle $x \in V$. Daß diese Beziehung sogar für alle $x \in \widetilde{M}$ gilt, folgt mit dem Wegzusammenhang von $\widetilde{M}$ und der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung nach B.1.4. $\square$

2.2 Lemma: Die Existenz der globalen Karte

- (i) Sei M eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit und (U, ϕ) eine Karte aus einem (G, X) -Atlas von $\widetilde{M}$. Dann existiert eine globale Karte Φ von M , sodaß $\Phi|_U = \phi$ gilt.
 (ii) Die Menge der globalen Karten von M bildet einen Raum, auf dem G einfach transitiv operiert.

Beweis von (i): Man definiert Φ an einem Punkt y außerhalb von U , indem man $x \in U$ mit y durch einen Weg w verbindet und den von ϕ am Punkt $w(a)$ induzierten Keim gemäß B.1.4 längs w quasianalytisch fortsetzt. Da $\widetilde{M}$ als universelle Überlagerung einfach zusammenhängend ist, d.h. je zwei Verbindungswege von x nach y relativ homotop sind, stellt Lemma B.1.9 sicher, daß diese Definition unabhängig von dem gewählten Weg w ist. Da dieser Fortsetzungsprozess immer nur mittels Keimen strukturerhaltender Abbildungen erfolgt, ergibt sich leicht, daß Φ in einer Umgebung jedes Punktes und damit überhaupt strukturerhaltend wird.

Zu (ii): Folge von 2.1(ii). $\square$

Die Definitionen der Holonomie, der globalen Karte und des kanonischen Isomorphismus zwischen der Fundamentatgruppe und der Deckbewegungsgruppe gewähren einem stets gewisse Freiheiten bei der expliziten Konstruktion. Wenn daher in einer Rechnung mehrere dieser Abbildungen vorkommen, so sollte ihre genaue Definition aufeinander abgestimmt werden. Dies wird durch den nachfolgenden Begriff geregelt:

2.3 Satz-Definition: Sei M eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit und $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ eine universelle Überlagerung von M gemäß A.2.17(ii). Dann gilt:

- (i) Eine Holonomieabbildung $h: \pi_1(M) \rightarrow G$, eine globale Karte $\Phi: \widetilde{M} \rightarrow X$ und ein kanonischer Gruppenisomorphismus $\eta: \pi_1(M) \rightarrow \text{Deck}(M)$ in die auf $\widetilde{M}$ operierende Deckbewegungsgruppe von M heißen "verträglich zueinander", wenn folgende

Gleichung gilt:

$$\hbar(\alpha) \circ \Phi = \Phi \circ \eta(\alpha) \quad \forall \alpha \in \pi_1(M).$$

- (ii) Sei $P \in M$ und $\tilde{P} \in p^{-1}(\{P\})$. Seien Karten (U, ϕ) von M und $(\tilde{U}, \tilde{\phi})$ von $\tilde{M}$ so gewählt, daß $P \in U$, $\tilde{P} \in \tilde{U}$ und $\tilde{\phi} = \phi \circ p$ gilt. η werde als kanonischer Gruppenisomorphismus $\pi_1(M, P) \rightarrow \text{Deck}(M)$ wie in [StZ].6.5.6/6.2.2 dadurch konstruiert, daß einer durch w repräsentierten Homotopieklasse diejenige Deckbewegung zugeordnet wird, die $\tilde{P}$ auf den Endpunkt der im Punkt $\tilde{P}$ beginnenden Liftung des Weges w abbildet. Die globale Karte Φ sei gemäß 2.2(i) so gewählt, daß $\Phi|_{\tilde{U}} = \tilde{\phi}$ ist. Dann sind Φ , η und $\hbar_\phi$ verträglich zueinander.
- (iii) Zu jeder globalen Karte Φ und jeder Deckbewegung $T \in \text{Deck}(M)$ existiert genau ein $g \in G$, sodaß $g \circ \Phi = \Phi \circ T$ gilt.
- (iv) Die Zuordnung $T \mapsto g$, die gemäß (iii) für jede feste globale Karte Φ möglich ist, ist in jedem Fall ein Homomorphismus, genannt $\hbar_\Phi : \text{Deck}(M) \rightarrow G$, dessen Bildgruppe stets eine Holonomiegruppe von M ist.

Beweis von (ii): Es ist also die Gleichung $\hbar(\alpha) \circ \Phi = \Phi \circ \eta(\alpha)$ für alle $\alpha \in \pi_1(M)$ zu zeigen. Da sowohl die globale Karte Φ , als auch die Gruppenoperation $\hbar(\alpha) \in G$, als auch gemäß A.2.17(iii) die Deckbewegung $\eta(\alpha)$ strukturerhaltend sind, reicht es nach B.1.4 die Übereinstimmung beider Abbildungen in einer beliebig kleinen Umgebung aus $\tilde{M}$ nachzurechnen. Dies soll auch nur das Ziel der folgenden Überlegungen sein.

Der Weg $w : [a, b] \rightarrow M$ sei ein Repräsentant der Homotopieklasse α und $\tilde{w} : [a, b] \rightarrow \tilde{M}$ sei seine zu $\tilde{w}(a) = \tilde{P}$ konstruierte Liftung. Die Schar der Keime $\{\psi_t \mid a \leq t \leq b\}$ beschreibe die quasianalytische Fortsetzung von ϕ längs w gemäß B.1.4 und $\{\tilde{\psi}_t \mid a \leq t \leq b\}$ entstehe als quasianalytische Fortsetzung von $\tilde{\phi}$ längs $\tilde{w}$. Gemäß B.1.6 gilt $\hbar(\alpha) = \psi_b \circ \psi_a^{-1}$. Nach Voraussetzung ist der von Φ am Punkt $\tilde{P} = \tilde{w}(a)$ induzierte Keim gleich $\tilde{\psi}_a$. Da Φ nach 2.2(i) durch quasianalytische Fortsetzung konstruiert werden kann, ist der von Φ am Punkt $\tilde{w}(b)$ induzierte Keim gleich $\tilde{\psi}_b$. Also induziert $\hbar(\alpha) \circ \Phi$ am Punkt $\tilde{P}$ den Keim $\psi_b \circ \psi_a^{-1} \circ \tilde{\psi}_a$. Bezeichnen wir mit p_t den von der Überlagerungsprojektion p am Punkt $\tilde{w}(t)$ induzierten Keim, und benutzen, daß wir $\eta(\alpha)$ als diejenige Deckbewegung gewählt hatten, die $\tilde{P} = \tilde{w}(a)$ auf $\tilde{w}(b)$ abbildet, so ergibt sich $\psi_b \circ \psi_a^{-1} \circ \tilde{\psi}_a = \psi_b \circ p_b \circ \eta(\alpha) \circ p_a^{-1} \circ \psi_a^{-1} \circ \tilde{\psi}_a = \tilde{\psi}_b \circ \eta(\alpha) \circ \tilde{\psi}_a^{-1} \circ \tilde{\psi}_a = \tilde{\psi}_b \circ \eta(\alpha)$. Mit der Fixierung von Φ am Punkt $\tilde{P}$ und der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung ergibt sich so, daß letzteres genau der von $\Phi \circ \eta(\alpha)$ am Punkt $\tilde{P}$ induzierte Keim ist.

Zu (iii) und (iv): Gemäß (ii) können die fraglichen Homomorphismen $\hbar_\Phi$ als $\hbar \circ \eta^{-1}$ konstruiert werden. Unabhängig von ihrer Konstruktion ergibt sich in jedem Fall ihre Eindeutigkeit dadurch, daß zu bekanntem Φ und T eine unbekannte Abbildung g , die $g \circ \Phi = \Phi \circ T$ erfüllen soll, stets zunächst auf $\text{Bild}(\Phi|_V)$ eindeutig definiert werden kann, wenn V ein Injektivitätsbereich der globalen Karte Φ ist. Mit der Quasianalytizität von G kann es damit jedoch höchstens ein $g \in G$ geben. $\square$

2.4 Bemerkungen:

Sei M eine (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit, $\widetilde{M}$ eine zugehörige universelle Überlagerung gemäß A.2.17(ii) und $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow X$ eine globale Karte entsprechend 2.1/2.2. Dann gilt:

- (i) Es existiert ein Atlas von $\widetilde{M}$, dessen sämtliche Übersetzungsabbildungen Einschränkungen der Identität sind, nämlich $\mathcal{A}_\Phi$, konstruiert gemäß A.2.8(1).
- (ii) Es existiert ein Atlas von M , dessen sämtliche Übersetzungsabbildungen Einschränkungen von Operationen aus der Holonomiegruppe von M sind. Dieser Atlas wird nach folgendem Schema konstruiert. Sei
 - ▷ $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ ein die Struktur von $\widetilde{M}$ beschreibender Atlas,
 - ▷ $\mathcal{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ eine offene Überdeckung von M mit einfach zusammenhängenden Mengen und
 - ▷ $\{V_{j,k} \mid (j, k) \in J \times K\}$ die Menge aller Zusammenhangskomponenten der Liftungen der $\mathcal{V}$ -Mengen nach $\widetilde{M}$.

Dann definieren wir:

- (1) $p(\mathcal{A}) := \{(p(U_i \cap V_{j,k}), \phi_i \circ p|_{V_{j,k}}) \mid i \in I, (j, k) \in J \times K, \text{ soda\ss } U_i \cap V_{j,k} \neq \emptyset\}$.

Setzen wir bei (1) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\Phi$ (definiert gemäß (i)/A.2.8(1)) ein, so entsteht mit " $p(\mathcal{A}_\Phi)$ " der "durch die globale Karte induzierte Atlas von M ", für den wir jetzt die im ersten Satz von (ii) behauptete Eigenschaft verifizieren wollen:

Da nach A.2.8(1) $\mathcal{A}_\Phi$ keine nicht-trivialen Übersetzungsabbildungen hat, entstehen bei dem Atlas $p(\mathcal{A}_\Phi)$ Übersetzungsabbildungen nur dadurch, daß Punkte von M verschiedene Liftungen in $\widetilde{M}$ haben können. Da die verschiedenen Liftungen eines Punktes von M nach $\widetilde{M}$ durch eine Deckbewegung aufeinander abgebildet werden, werden die verschiedenen Einbettungen dieser Liftungen nach X mittels der globalen Karte Φ bzw. des Atlas $\mathcal{A}_\Phi$ gemäß 2.3(iii)/2.3(iv) durch Abbildungen aus der Holonomiegruppe von M aufeinander abgebildet. Daher die Aussage betreffs der Übersetzungsabbildungen von $p(\mathcal{A}_\Phi)$ und die Erkenntnis, daß $p(\mathcal{A}_\Phi)$ überhaupt ein wohldefinierter (G, X) -Atlas ist (vgl. die analogen Definitionen und Bezeichnungen für Atlanten in A.2.17(1)/A.2.8(1)).

2.5 Bemerkung: Ist X eine einfach zusammenhängende Grundmannigfaltigkeit, $H \subset G$ und X/H eine im Sinne von A.2.3 definierte (G, X) -strukturierte Mannigfaltigkeit, so kann bei Identifikation der nach A.2.17 definierten der universellen Überlagerung $\widetilde{X}/H$ mit X (vgl. B.1.19) die Identität als globale Karte aufgefaßt werden. Im Sinne von 2.3(iv) wird damit auch h_{Id} zur Identität.

2.6 Definition: Sei M eine wohlstrukturierte (G, X) -Mannigfaltigkeit. Dann heißt M "vollständig", wenn die zugehörige globale Karte eine Überlagerung ist. Gilt es, diesen Vollständigkeitsbegriff von anderen (z.B. metrischer Vollständigkeit, geodätischer Vollständigkeit) zu unterscheiden, so bezeichnen wir den hier eingeführten Begriff als "WST-vollständig". Diese Sprechweise wird erst durch die Definition D.1.2(ii) verständlich.

Wohldefiniertheitsbeweis: Nach der Eindeutigkeitsaussage 2.1(ii) unterscheiden sich je zwei globale Karten nur um eine Operation von G , d.h. gehen durch Anmultiplizieren eines Homöomorphismus auseinander hervor. Damit stimmen ihre wesentlichen topologischen Eigenschaften überein, insbesondere, ob sie eine Überlagerung sind oder nicht. $\square$

2.7 Lemma: Die Vollständigkeit einer (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeit ist eine Strukturinvariante, d.h. sind zwei (G, X) -Mannigfaltigkeiten M, M' strukturgleich, so sind sie entweder beide vollständig oder beide nicht.

Beweis: Sei also $f : M \rightarrow M'$ ein strukturerhaltender Homöomorphismus und $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ bzw. $p' : \widetilde{M}' \rightarrow M'$ die zu M bzw. M' gehörenden universellen Überlagerungen. Wir liften dann f zu einem Homöomorphismus $\tilde{f} : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}'$, d.h. es gilt $f \circ p = \tilde{f} \circ p'$; nach A.2.17(iii) wird $\tilde{f}$ außerdem strukturerhaltend. Sei $\Phi' : \widetilde{M}' \rightarrow X$ eine globale Karte von M' . Da $\Phi' \circ \tilde{f}$ das Kriterium 2.1(i) erfüllt, ist dies eine globale Karte von $\widetilde{M}$. Weil diese beiden globalen Karten somit durch Anmultiplizieren eines Homöomorphismus auseinander hervorgehen, gilt dasselbe Argument wie beim Wohldefiniertheitsbeweis von 2.6, um diesen Beweis abzuschließen. $\square$

2.8 Lemma: Ist M eine vollständige (G, X) -Mannigfaltigkeit mit Holonomiegruppe $H \subset G$, so ist M strukturerhaltend homöomorph zu X/H .

Beweis: Sei $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ eine universelle Überlagerung und $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow X$ eine globale Karte von M . Wegen der Vollständigkeit von M ist Φ in dem Fall eine Überlagerung. Da X als einfach zusammenhängend vorausgesetzt wird und demnach nur einblättrige Überlagerungen hat, ist Φ sogar ein strukturerhaltender Homöomorphismus. Die Aussagen 2.3(iii)/2.3(iv) implizieren dann, daß durch Konjugation mit Φ bzw. Φ^{-1} alle Deckbewegungen in Abbildungen der Holonomiegruppe bzw. umgekehrt ineinander übergehen. Da durch die Operation der Gruppe $\text{Deck}(\widetilde{M})$ genau diejenigen Punkte von $\widetilde{M}$ aufeinander abgebildet werden, die durch p auf dieselben Punkte von M projiziert werden, induziert Φ somit einen Homöomorphismus $\bar{\Phi} : M \rightarrow X/H$, sodaß $\bar{\Phi} \circ p = q \circ \Phi$ gilt. Aus A.1.8 und der letzten Gleichung folgt, daß $\bar{\Phi}$ auch strukturerhaltend ist. $\square$

2.9 Satz: Sind M und M' zwei nicht strukturgleiche vollständige wohlstrukturierte (G, X) -Mannigfaltigkeiten, und ist X einfach zusammenhängend, so sind die Holonomiegruppen von M und M' nicht konjugiert zueinander.

Beweis: Analog zu B.1.21 gilt, daß X/H_1 und X/H_2 strukturerhaltend homöomorph zueinander sind, wenn H_1 und H_2 in G zueinander konjugiert sind. Damit folgt dieser Satz aus Lemma 2.8.

2.10 Beispiel: Die Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung.

(i) : Ist M ein euklidischer Ähnlichkeitstorus in seiner Standarddarstellung, so ist nach A.2.4 $M = \mathbb{C}/H$. Nach 2.5 ist dann die globale Karte $\Phi = \text{Id}$ und somit insbesondere

eine Überlagerung. Die in Standarddarstellung gegebenen euklidischen Ähnlichkeitstori sind damit vollständig. Für sie haben wir ja die in Rahmen von 2.9 bewiesene Aussage bereits in B.1.21 vorweggenommen.

- (ii) : Sei $M = \Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^*/H)$ ein echter Ähnlichkeitstorus gemäß A.2.15. Da nach A.2.17(v) $\tilde{C}^*$ als universelle Überlagerung aller in Standarddarstellung gegebener echten Ähnlichkeitstori aufgefaßt werden kann und Cpl als strukturerhaltende Abbildung $\tilde{C}^* \rightarrow C$ gemäß A.2.17(iv), ist Cpl nach der Eindeutigkeitsaussage 2.1(i) eine globale Karte aller echten Ähnlichkeitstori. Da der Grundmannigfaltigkeit der echten Ähnlichkeitstori nach Definition C (und nicht C^*) ist, kann Cpl nicht als Überlagerung aufgefaßt werden. Die in Standarddarstellung gegebenen echten Ähnlichkeitstori sind demnach nicht vollständig.

§3: Vollständigkeitskriterien

3.1 Kriterium:

Ist G eine invariant gegenüber einer inneren Metrik von X operierende Gruppe und M eine kompakte (G, X) -Mannigfaltigkeit, so ist M auch vollständig.

3.2 Kriterium:

Sei G eine transitive Transformationsgruppe von Isometrien bezüglich einer riemannschen Metrik von X . Dann sind für alle (G, X) -Mannigfaltigkeiten M äquivalent:

- (1) M ist WST-vollständig.
 - (2) M ist metrisch vollständig.
 - (3) M ist geodätisch vollständig.
 - (4) Es existiert $\varepsilon > 0$, sodaß $\overline{U(x, \varepsilon)}$ kompakt für alle $x \in M$ ist.
 - (5) $\overline{U(x, \delta)}$ ist kompakt für alle $x \in M$ und für alle $\delta > 0$.
 - (6) Es existiert eine Mengenfamilie $\{S_t \mid t \in \mathbb{R}_+\}$, sodaß

(i) $S_t \subset M$	(ii) S_t ist kompakt für alle t
(iii) $U(S_t, a) \subset S_{t+a}$	(iv) $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} (S_t) = M$
- gilt.

Die Beweise der Kriterien 3.1 und 3.2 ergeben sich aus den im folgenden aufgestellten Lemmas 3.3–3.10

3.3 Lemma: Sei G eine auf X invariant gegenüber einer inneren Metrik von X operierende Gruppe, sodaß gemäß 1.3 auf allen (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeiten eine induzierte innere Metrik existiert. Mit $p: \tilde{M} \rightarrow M$ werde eine universelle Überlagerung

einer kompakten (G, X) -Mannigfaltigkeit M betrachtet. Dann existiert $\varepsilon > 0$, sodaß für alle $x \in M$, $y \in \widetilde{M}$ und $\delta \in (0, \varepsilon]$ gilt:

- (i) $p^{-1}(U(x, \delta)) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})} (U(\tilde{x}, \delta))$ und alle $p|_{U(y, \delta)} : U(y, \delta) \rightarrow U(p(y), \delta)$ sind bijektive Isometrien.
- (ii) Gilt $U(x, \delta) \subset V$ für eine Karte (V, ϕ) von M , so ist $\phi|_{U(x, \delta)} : U(x, \delta) \rightarrow U(\phi(x), \delta) \subset X$ eine bijektive Isometrie.
- (iii) Jede Einschränkung einer globalen Karte Φ von M auf eine Umgebung $U(y, \delta)$ bildet diese bijektiv und isometrisch auf $U(\Phi(y), \delta)$ ab.

Beweis: ε wird als $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ definiert, wobei ε_1 im Schritt (i) und ε_2 im Schritt (ii) bestimmt wird.

Zu (i): Sei $B \subset \widetilde{M}$ ein Blatt der Überlagerung $p : \widetilde{M} \rightarrow M$, d.h. $p_B : B \rightarrow M$ ist bijektiv. Wir setzen $q := (p_B)^{-1}$. Da nach dem Liftungskriterium [StZ].6.2.6 die Inklusion jeder Teilmenge einer einfach zusammenhängenden Umgebung auf jede Überlagerung liftbar ist und mithin eine solche Teilmenge im Sinne von [StZ].6.1.1 stets gleichmäßig überlagert wird und da nach 1.5(ii) jede Einschränkung von p auf eine hinreichend kleine Umgebung eine lokale Isometrie ist, kann zu jedem $x \in M$ ein Radius η_x so gewählt werden, daß die Eigenschaften (1.) und (2.) erfüllt sind.

(1.) $p^{-1}(U(x, \eta_x)) = \bigcup_{\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})} W_{\tilde{x}}$, sodaß $p|_{W_{\tilde{x}}} = p_{\tilde{x}} : W_{\tilde{x}} \rightarrow U(x, \eta_x)$ ein Homöomorphismus ist.

(2.) Es ist $p_{q(x)}$ eine Isometrie und $W_{q(x)} = U(q(x), \eta_x)$.

(3.) Für alle $\tilde{x} \in p^{-1}(\{x\})$ ist $p_{\tilde{x}}$ eine Isometrie und $W_{\tilde{x}} = U(\tilde{x}, \eta_x)$.

Mit (1.) und (2.) ist auch stets (3.) erfüllt, denn nach 1.5(v) operieren alle Deckbewegungen als Isometrien. Sei $\mathcal{U}$ die Überdeckung $\{U(x, \eta_x) \mid x \in M\}$. Da M kompakt ist, besitzt diese Überdeckung eine Lebesgue'sche Zahl ε_1 , d.h. es existiert $\varepsilon_1 > 0$, sodaß für alle $x \in M$ eine Inklusion $U(x, \varepsilon_1) \subset W \in \mathcal{U}$ für geeignetes W besteht.

Zu (ii): Wir wählen zunächst für jedes $x \in M$ eine einfach zusammenhängende diesen Punkt überdeckende Karte (V_x, ϕ_x) und ordnen unserem x dann analog wie im vorangegangenen Beweis einen Radius δ_x zu, sodaß $U(x, \delta_x) \subset V_x$ und $\phi|_{U(x, \delta_x)} : U(x, \delta_x) \rightarrow U(\phi(x), \delta_x)$ eine bijektive Isometrie ist. ε_2 entsteht dann als Lebesgue'sche Zahl der Überdeckung $\{U(x, \delta_x) \mid x \in M\}$.

Zu (iii): Nach (i) und (ii) existiert zu jedem $y \in \widetilde{M}$ eine Karte $(V_{p(y)}, \phi_{p(y)})$ von M , sodaß $V_{p(y)} \supset U(p(y), \varepsilon)$ und $(\phi_{p(y)} \circ p)|_{U(y, \varepsilon)} : U(y, \varepsilon) \rightarrow U(\phi(p(y)), \varepsilon)$ eine bijektive Isometrie für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ist. Nach 2.2(i) kann jede dieser bijektiven Isometrien $(\phi_{p(y)} \circ p)|_{U(y, \varepsilon)}$ zu einer globalen Karte fortgesetzt werden. Da verschiedene globale Karten nach 2.1(ii) sich nur um eine Operation $g \in G$ unterscheiden und g nach 1.5(v) eine Isometrie beschreibt, bildet $\{g \circ (\phi_{p(y)} \circ p)|_{U(y, \varepsilon)} \mid g \in G\} =: A_y$ die Menge aller Restrikte aller globalen Karten auf $U(y, \varepsilon)$. Alle Abbildungen $\Phi|_{U(y, \varepsilon)} \in A_y$ sind damit bijektive Isometrien, die jeweils auf $U(\Phi(y), \varepsilon)$ abbilden. $\square$

3.4 Beweis von Kriterium 3.1:

1. Schritt: Zu zeigen: Die globale Karte Φ hat die Weghochhebungseigenschaft.

Sei also $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg und $P \in \Phi^{-1}(\{w(a)\})$. Sei

$$(1) \quad s := \sup\{t \in [a, b] \mid \text{Es existiert } \tilde{w} : [a, t] \rightarrow \widetilde{M}, \tilde{w}(a) = P, \Phi \circ \tilde{w} = w|_{[a, t]}\}.$$

Da Φ als strukturerhaltende Abbildung in einer Umgebung von P lokal homöomorph ist, ist $s > 0$. Weil je zwei partielle Liftungen von w wegen der lokalen Homöomorphie von Φ auf ihrem gemeinsamen Definitionsbereich übereinstimmen müssen, ist also ein Weg $\tilde{w} : [a, s] \rightarrow \widetilde{M}$ mit den in (1) genannten Eigenschaften definiert. Sei dann $s_i \in [0, s]$, sodaß $\lim_{i \rightarrow \infty} (s_i) = s$. Wegen der Stetigkeit von w gilt $\lim_{i \rightarrow \infty} (w(s_i)) = w(s)$. Nach 1.5(i) bilden damit die $(\tilde{w}(s_i))_{i \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei dann $\tilde{N}$ so gewählt, daß $\rho(\tilde{w}(s_i), \tilde{w}(s_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $i, j \geq N$ ist, wobei ε gemäß 3.3 definiert ist. Mit der Isometrie von $U(\tilde{w}(s_N), \varepsilon)$ zu $U(w(s_N), \varepsilon)$ gemäß 3.3(iii) und dem Umstand, daß letztere Umgebung ja auch eine Umgebung des Punktes $w(s)$ ist, ergibt sich somit die Möglichkeit, $\tilde{w}$ auch über den Parameterwert s hinaus zu definieren. Dies ist nur dann kein Widerspruch zu (1), wenn bereits $s = b$ und auch $\tilde{w}(b)$ definiert ist.

2. Schritt: Es gilt jetzt zu zeigen, daß Φ eine Überlagerung ist, d.h. daß zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, sodaß die Einschränkung von Φ auf jede Zusammenhangskomponente von $\Phi^{-1}(U(x))$ ein Homöomorphismus ist:

Für jedes $x \in X$ ist $\Phi^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$, denn $\Phi^{-1}(\{x\})$ enthält, wie im 1. Schritt gezeigt, zumindest den Endpunkt der Hochhebung eines Verbindungsweges zwischen x und einem $z \in \text{Bild}(\Phi)$. Da Φ ein lokaler Homöomorphismus ist, ist $\Phi^{-1}(\{x\}) =: \{x_i \mid i \in I\}$ häufungspunktfrei. Da nach 3.3(iii) die Abbildungen $\Phi|_{U(x_i, \varepsilon)}$ injektiv sind, muß zumindest für $\delta := \frac{\varepsilon}{3}$ das Mengensystem $\{U(x_i, \delta) \mid i \in I\}$ disjunkt sein. Außerdem gilt $\Phi^{-1}(U(x, \delta)) = \bigcup_{i \in I} (U(x_i, \delta))$, wie sich allein mit Hilfe der Weghochhebungseigenschaft von Φ analog begründen läßt, wie 1.5(iv). Insgesamt gilt also sogar $\Phi^{-1}(U(x, \delta)) = \bigcup_{i \in I} (U(x_i, \delta))$, was zusammen mit 3.3(iii) bestätigt, daß Φ eine Überlagerung ist. $\square$

3.5 Beweis von 3.2(2) $\implies$ 3.2(3) :

Diese Aussage ist ein Sonderfall des Satzes von Hopf und Rinow (vgl. [Mil].II.10.9). Der Beweis folgt im Prinzip folgendem Schema:

Die beliebige Verlängerbarkeit von Geodäten in M wird gezeigt, indem diese entsprechend der Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten ([Mil].II.10.1–3) konstruiert und zunächst soweit als möglich verlängert werden. Durch eine Supremumsdefinition (vergleichbar 3.4(1)) gelangen wir zunächst zu einem Parameterwert s , können dann mit Hilfe der in 3.2(2) vorausgesetzten metrischen Vollständigkeit von M den Punkt $w(s)$ noch als Grenzwert der $w(t)$ für $t < s$ definieren und anschließend in einer Normalumgebung von $w(s)$ die Geodäte w über den Parameterwert s hinaus verlängern, was, wie in 3.4(1.), den Beweis durch einen Widerspruch abschließt. $\square$

3.6 Beweis von 3.2(3) $\implies$ 3.2(1) :

Die geodätische Vollständigkeit von M und $\widetilde{M}$ sind äquivalent, denn nach 1.6(iv) führt die strukturerhaltende Überlagerungsprojektion $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ ja Geodäten in Geodäten über. Durch Projektion bzw. Hochhebung läßt sich also mit der beliebigen Verlängerbarkeit der Geodäten in der einen Mannigfaltigkeit diese Eigenschaft auch für die andere

Mannigfaltigkeit nachweisen.

Die WST-Vollständigkeit von M müssen wir dann gemäß 2.6 dadurch zeigen, daß wir die globale Karte $\Phi: \widetilde{M} \rightarrow X$ als Überlagerung nachweisen:

1. Schritt: Zu zeigen: Φ ist surjektiv.

Angenommen, es gäbe in X Punkte, die nicht in $\text{Bild}(\Phi)$ liegen. Wir verbinden einen solchen Punkt durch einen Weg mit einem aus $\text{Bild}(\Phi)$ und tasten uns auf diesem Weg durch Intervallschachtelung bis zu einem Punkt vor, in dessen Normalumgebung (vgl. [Mil].II.10.3) sowohl ein Punkt $P \in \text{Bild}(\Phi)$ als auch ein Punkt $Q \notin \text{Bild}(\Phi)$ liegen. Gemäß [Mil].II.10.3 können P und Q durch ein geodätisches Segment w miteinander verbunden werden. Es gilt dann einen Widerspruch zu der Annahme, daß es überhaupt Punkte $\in X - \text{Bild}(\Phi)$ gibt, dadurch herbeizuführen, daß wir die Hochhebbarkeit von w auf $\widetilde{M}$ und somit ein Urbild von Q unter Φ nachweisen. Ein Anfangssegment von w kann wegen der lokalen Homöomorphie von Φ hochgehoben werden, und wegen der geodätischen Vollständigkeit von $\widetilde{M}$ kann dieses Anfangssegment in $\widetilde{M}$ genau auf die Länge $\ell(w)$ verlängert werden. Der Endpunkt dieser Verlängerung ist dann ein Urbild von Q ; dies ist eine Folgerung, die sich aus der eindeutigen Verlängerbarkeit von Geodäten gemäß [Mil].II.10.1–3 und der Invarianz der strukturerhaltenden Abbildung Φ gegenüber Längen und Geodäten gemäß 1.5(i)/1.6(iv) ergibt.

2. Schritt: Zu zeigen: Φ ist eine Überlagerung.

Sei $v \in T_x(M)$, d.h. ein Tangentialvektor an M mit Fußpunkt x aus unserer (G, X) -strukturierten Mannigfaltigkeit M , und σ_v sei die Geodäte mit Startvektor v , d.h. σ_v ist die Parametrisierung einer mindestens auf einem rechtsseitigen Intervall um die null definierten geodätischen Kurve mit $\sigma_v(0) = x$ und $\sigma'_v(0) = v$. Nach dem Satz über die eindeutige Verlängerbarkeit von Geodäten ([Mil].II.10.1–3) ist die Abbildung σ_v durch diese Angaben für jede riemannsche Mannigfaltigkeit M eindeutig bestimmt.

Sei $x \in M$ beliebig, aber im folgenden fest gewählt. Wir bestimmen den Radius $\varepsilon > 0$ so, daß $U(x, \varepsilon)$ in einer Normalumgebung (siehe [Mil].II.10.3) von x enthalten ist. Da also in $U(x, \varepsilon)$ je zwei Punkte durch ein eindeutiges geodätisches Segment verbunden werden können, gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} U(x, \varepsilon) &= \{\sigma_v(t) \mid v \in T_x(M), \|v\| = 1, t \in [0, \varepsilon)\}, \\ &\text{wobei } \sigma_{v_1}(t_1) \neq \sigma_{v_2}(t_2), \text{ falls } v_1 \neq v_2 \text{ oder } t_1 \neq t_2 \in (0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Wir betrachten dann $\Phi^{-1}(\{x\})$, was nach dem im ersten Schritt Gezeigten nicht leer sein kann und häufungspunktfrei sein muß, da Φ als globale Karte ein lokaler Homöomorphismus ist. Da, wie zu Beginn dieses Beweises bemerkt, $\widetilde{M}$ geodätisch vollständig ist und mithin nach dem Satz von Hopf und Rinow ([Mil].II.10.9) die kürzeste Verbindung zwischen je zwei Punkten durch eine Geodäte realisiert werden kann, gilt für alle $\tilde{x} \in \Phi^{-1}(\{x\})$:

$$(2) \quad U(\tilde{x}, \varepsilon) = \{\sigma_v(t) \mid v \in T_{\tilde{x}}(\widetilde{M}), \|v\| = 1, t \in [0, \varepsilon)\}.$$

Benutzen wir dann, daß Φ als strukturerhaltende Abbildung nach 1.5(i) invariant gegenüber Weglängen und nach 1.6(iv) invariant gegenüber Geodäten operiert, so folgt.

daß Φ und $d_{\tilde{x}}\Phi$, d.h. das Differential von Φ im Punkt $\tilde{x}$, der nachfolgenden Beziehung genügen:

$$(3) \quad \Phi(\sigma_v(t)) = \sigma_{d_{\tilde{x}}\Phi(v)}(t) \quad \forall v \in T_{\tilde{x}}(\widetilde{M}).$$

Dabei ist $d_{\tilde{x}}\Phi$ ein Isomorphismus zwischen den Tangentialräumen, da Φ ja ein lokaler Homöomorphismus war. Aus der Wohldefiniertheit von Φ gemäß 2.1/2.2, der Koordinatenverträglichkeit von Φ gemäß (3) und der Darstellungen der Umgebungen (1) und (2) ergibt sich, daß eine Eindeutigkeitsaussage für die Polarkoordinaten (v, t) analog wie in (1) auch für die Umgebungen (2) möglich ist:

$$(4) \quad \sigma_{v_1}(t_1) \neq \sigma_{v_2}(t_2), \text{ wenn } v_1 \neq v_2 \in T_{\tilde{x}}(\widetilde{M}) \text{ oder } t_1 \neq t_2 \in (0, \varepsilon).$$

Mit der Koordinatenverträglichkeit von Φ folgt dann auch, daß $\Phi|_{U(\tilde{x}, \varepsilon)} : U(\tilde{x}, \varepsilon) \rightarrow U(x, \varepsilon)$ ein Homöomorphismus ist. Aus der Injektivität dieser Abbildungen ergibt sich auch, daß die Umgebungen $U(\tilde{x}, \varepsilon)$ disjunkt werden, wenn wir den Radius ε auf $\frac{\varepsilon}{3}$ reduzieren. Damit wird der Punkt x im Sinne von [StZ].6.1.1 gleichmäßig überlagert. Da x beliebig war, ist Φ somit eine Überlagerung und M gemäß 2.6 WST-vollständig. $\square$

3.7 Beweis von 3.2(1) $\implies$ 3.2(4) :

Sei $x \in X$ zunächst fest gewählt. Da M als Mannigfaltigkeit nach A.1.1 lokal homöomorph zum $\mathbb{R}^n$ ist, können wir $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ wählen, sodaß

(i) $\overline{U(x, 2 \cdot \varepsilon)}$ kompakt ist und

(ii) $\overline{U(x, 2 \cdot \varepsilon)}$ in einer zu einem $\mathbb{R}^n$ -Ball homöomorphen Umgebung von x liegt.

Da auf X mit G eine Gruppe von Isometrien transitiv operiert, gelten die Eigenschaften (i) und (ii) für unser festes ε jedoch für alle $x \in X$. Da nach 3.2(1) Φ eine Überlagerung ist, ergibt sich nach 1.5(iv), daß $\Phi^{-1}(U(x, 2 \cdot \varepsilon)) = \bigcup_{\tilde{x} \in \Phi^{-1}\{x\}} U(\tilde{x}, 2 \cdot \varepsilon)$ ist. Da mit (ii), wie zu Beginn des Beweises von 3.3(i) geschlossen, $U(x, 2 \cdot \varepsilon)$ gleichmäßig überlagert wird, ist die zuletzt genannte Vereinigung disjunkt und sind bezüglich der entsprechenden Einschränkung von Φ alle $U(\tilde{x}, 2 \cdot \varepsilon)$ homöomorph zu $U(x, 2 \cdot \varepsilon)$. Die Eigenschaft (ii) garantiert diese Homöomorphie sogar noch für eine etwas größere Umgebung, sodaß wir daraus auch auf die Kompaktheit aller $\overline{U(\tilde{x}, 2 \cdot \varepsilon)}$ schließen können. Da $x \in X$ beliebig gewählt werden konnte, folgt so für alle $y \in \widetilde{M}$, daß $\overline{U(y, 2 \cdot \varepsilon)}$ kompakt ist. Wir betrachten dann die Überlagerungsprojektion $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ und können schließen, daß alle Mengen $p(\overline{U(y, 2 \cdot \varepsilon)})$ kompakt sind. Da p als Überlagerungsprojektion surjektiv ist, d.h. jedes $z \in M$ als $z = p(y)$ dargestellt werden kann, ergibt somit die nachfolgende Inklusionskette

$$\overline{U(z, \varepsilon)} = \overline{U(p(y), \varepsilon)} \subset U(p(y), 2 \cdot \varepsilon) \stackrel{1.5(\text{iii})}{\subset} p(U(y, 2 \cdot \varepsilon)) \subset p(\overline{U(y, 2 \cdot \varepsilon)}),$$

daß für alle $z \in M$ die Mengen $\overline{U(z, \varepsilon)}$ als abgeschlossene Teilmengen der kompakten Mengen $p(\overline{U(y, 2 \cdot \varepsilon)})$ kompakt sind.

3.8 Beweis von 3.2(4) $\implies$ 3.2(5) :

Da abgeschlossene Teilmengen kompakter Mengen stets kompakt sind, folgt, daß zu jedem Punkt P ein Grenzdiameter $\delta_P \in \mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$ existieren muß, sodaß

$$(1) \quad \begin{array}{ll} \overline{U(p, \alpha)} & \text{kompakt ist} \quad \text{für } \alpha < \delta_P \\ \text{und } \overline{U(p, \alpha)} & \text{nicht kompakt ist} \quad \text{für } \alpha > \delta_P. \end{array}$$

Wir betrachten dann

$$(2) \quad \delta := \inf\{\delta_P \mid P \in M\},$$

wobei wir hier annehmen, daß δ endlich ist. Aus der Voraussetzung 3.2(4) können wir folgern, daß $\delta \geq \varepsilon$ gilt. Für die folgende Konstruktion wählen wir einen Punkt $x \in M$, sodaß

$$(3) \quad \delta_x \in [\delta, \delta + \frac{\varepsilon}{4})$$

ist. Da ja nach Voraussetzung 3.2(4) $\overline{U(x, \varepsilon)}$ kompakt ist, lassen sich mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ endlich viele Punkte aus $\overline{U(x, \varepsilon)}$ bestimmen, sodaß

$$(4) \quad \bigcup_{i=1}^n \overline{U(x_i, \frac{\varepsilon}{2})} \supset \overline{U(x, \varepsilon)}.$$

Man kann sich dann die Inklusion

$$(5) \quad U(x, \delta + \frac{\varepsilon}{4}) \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{U(x_i, \delta - \frac{\varepsilon}{4})}$$

klarmachen, indem man die Besonderheiten einer inneren Metrik (vgl. 1.3/1.4(iii)) ausnutzt, die auf M nach der Generalvoraussetzung für beide Kriterien erklärt ist: Zu jedem Punkt $x' \in U(x, \delta + \frac{\varepsilon}{4})$ gibt es ja einen Verbindungsweg zwischen x und x' , der kürzer als $\delta + \frac{\varepsilon}{4}$ sein muß, und auf diesem muß ein Punkt x'' liegen mit $\rho(x'', x) < \varepsilon$ und $\rho(x'', x') < \delta - \frac{3 \cdot \varepsilon}{4}$. Mit (4) finden wir dann ein i , sodaß $\rho(x_i, x'') < \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Aus der Dreiecksungleichung folgt dann $\rho(x_i, x') < \delta - \frac{\varepsilon}{4}$ und somit die Formel (5). Die wiederum impliziert

$$(6) \quad \overline{U(x, \delta + \frac{\varepsilon}{4})} \subset \bigcup_{i=1}^n \overline{U(x_i, \delta - \frac{\varepsilon}{4})}.$$

Die Inklusion (6) birgt aber einen Widerspruch: Nach Definition von δ und δ_x in (1), (2) und (3) kann $\overline{U(x, \delta + \frac{\varepsilon}{4})}$ ja nicht kompakt sein, während die Mengen $\overline{U(x_i, \delta - \frac{\varepsilon}{4})}$ alle kompakt sein müssen. Also behauptet die Formel (6), daß eine abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Vereinigung nicht kompakt ist: Widerspruch. Obige Annahme, daß δ endlich ist, erweist sich also als falsch, was uns 3.2(5) beweist. $\square$

3.9 Beweis von 3.2(5) $\implies$ 3.2(6) :

Man bemerke, daß mit der Voraussetzung 3.2(5) die Menge $\{U(x, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}_+\}$ (x fest

$\in M$ gewählt) genau die gewünschten Eigenschaften 3.2(6(i)) – 3.2(6(iv)) erfüllt. $\square$

3.10 Beweis von 3.2(6) $\implies$ 3.2(2) :

Es gilt zu einer beliebigen Cauchy-Folge $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset M$ einen Grenzwert in M nachzuweisen. Mit der Cauchyfolgeneigenschaft der P_i folgt, daß ein Grenzindex n existiert, sodaß $\{P_i \mid i > n\} \subset U(P_n, 1)$ ist. Wegen 3.2(6(iv)) existieren Zahlen $t_1, t_2, \dots, t_n$, sodaß $P_i \in S_{t_i}$ für $i \in \{1, \dots, n\}$ ist. Für $i > n$ gilt: $P_i \in S_{t_{n+1}}$ wegen 3.2(6(iii)). Also folgt mit 3.2(6(ii)), daß die gesamte Folge $\{P_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ in einer kompakten Menge, nämlich $(\bigcup_{i=1}^{n-1} (S_{t_i})) \cup S_{t_{n+1}}$ enthalten ist. Die Cauchy-Folge $(P_i)_{i \in \mathbb{N}}$ hat demnach in dieser Menge einen Häufungspunkt, der sich mit der Cauchyfolgeneigenschaft auch gleich als Grenzwert nachweisen läßt. $\square$

Abschnitt D : Die Klassifikation der Ähnlichkeitstori

0.1 Zielbestimmung: In diesem Abschnitt gilt es jetzt, den dritten Klassifikationssatz der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten zu beweisen, d.h. zu zeigen, daß jeder Ähnlichkeitstorus strukturerhaltend homöomorph zu einem in Standarddarstellung gemäß A.2.4 oder A.2.15 gegebenen ist. Zusammen mit dem ersten (B.1.21) und dem zweiten (B.3.24) Klassifikationssatz und der Erkenntnis, daß alle geschlossenen $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeiten Tori sind (A.4.1) entsteht so eine vollständige Klassifikation aller geschlossenen Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur. Die in Abschnitt B nur für die in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori gezeigten Aussagen erhalten so eine wesentlich allgemeinere Gültigkeit (vgl. 5.3).

Um dieses Ziel zu erreichen, ist es erforderlich, noch einige abstraktere Vorstellungen und Begriffe zu entwickeln, vor allem um den "Vergleich" zwischen dem Typ der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten und den metrischen Typen strukturierter Mannigfaltigkeiten, deren Notwendigkeit ja bereits in Einl.0.4/Einl.0.5 begründet worden war, den nötigen präzisen Begriffsrahmen zu geben. Dies geschieht vor allem im §1.

§1: Kategorien und Kategorietransformationen strukturierter Mannigfaltigkeiten.

1.1 Zielbestimmung: Es gilt jetzt für die strukturierten und wohlstrukturierten Mannigfaltigkeiten Kategorien zu definieren, deren Objekte gerade diese Mannigfaltigkeiten und deren Morphismen die strukturerhaltenden Abbildungen sind. Durch Manipulation an den Atlanten (wohl)strukturierter Mannigfaltigkeiten können dann kanonische Funktoren zwischen diesen Kategorien erklärt werden, die den Vergleich, von dem wir eben in dem Einleitungsabsatz 0.1 noch einmal gesprochen haben, dann ermöglichen sollen. Diese Funktoren definieren induzierte Abbildungen auf der Menge aller Klassen strukturgleicher Mannigfaltigkeiten. Indem wir von diesen Abbildungen das Bild bestimmen und ihre Injektivität nachweisen bzw. den Grad der Abweichung von der Injektivität ermitteln, gelingt es, die Klassifikation der geschlossenen $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeiten auf die Klassifikation der in Abschnitt C diskutierten Strukturtypen zurückzuführen. Dies ist wiederum nach C.2.9/C.3.1 durch eine Diskussion der Frage möglich, welche Gruppen als Holonomiegruppen in Frage kommen. Ziel dieses Paragraphen ist es, diejenigen Abbildungen zwischen den Klassen strukturierter Mannigfaltigkeiten zu definieren (1.11), deren Diskussion schließlich die Klassifikation der geschlossenen $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturierter Mannigfaltigkeiten ermöglicht. Die Frage, ob bzw. inwieweit diese Abbildungen injektiv bzw. surjektiv sind, wird dann in den folgenden Paragraphen (§2–§4) diskutiert.

1.2 Definition: Sei X eine Grundmannigfaltigkeit, $\wp$ eine darauf operierende Pseudogruppe bzw. G eine quasianalytische Strukturgruppe dazu. Dann bezeichnet

- (i) $\text{ST}(\wp, X)$ die Kategorie der " $(\wp, X)$ -strukturierten Mannigfaltigkeiten" und
- (ii) $\text{WST}(G, X)$ die Kategorie der " (G, X) -wohlstrukturierten Mannigfaltigkeiten".

Diese Kategorien werden wie folgt erklärt:

- ▷ Die Objekte beider Kategorien sind die (wohlstrukturierten) Mannigfaltigkeiten im Sinne von Definition A.1.9, d.h. die Paare $(M, \mathcal{A})$, wobei M eine Mannigfaltigkeit und $\mathcal{A}$ ein dazugehöriger maximaler $(\wp, X)$ - bzw. (G, X) -Atlas ist.
- ▷ Die Morphismen dieser Kategorien sind die strukturerhaltenden Abbildungen im Sinne von A.1.8.
- (iii) Wie schon in A.1.10(iii) bezeichnen wir als Strukturklasse eine Bimorphismenklasse geschlossener Mannigfaltigkeiten einer ST- oder WST-Kategorie, d.h. eine Klasse strukturgleicher geschlossener Mannigfaltigkeiten. Die Menge der Strukturklassen, die die in einer Kategorie zusammengefaßten (wohl)strukturierten Mannigfaltigkeiten bilden, bezeichnen wir, indem wir einen Querstrich über den Namen der Kategorie setzen.

Wir definieren jetzt das allen in dieser Arbeit betrachteten Übergängen zwischen den verschiedenen Strukturtypen, d.h. allen Funktoren zwischen ST- und WST- gemeinsame Konstruktionsschema:

1.3 Satz-Definition der Kategorietransformationen:

Seien X und Y Grundmannigfaltigkeiten und G bzw. H zugehörige Strukturgruppen.

- (i) Man bezeichnet einen lokalen Homöomorphismus $\gamma : X \rightarrow Y$ als "Transformationsgruppenübersetzung $(G, X) \rightarrow (H, Y)$ ", wenn für jedes feste $g \in G$ die Zuordnungsvorschrift $\gamma(x) \mapsto \gamma(g(x))$ zwischen Punkten aus X sich quasianalytisch widerspruchsfrei zu einer Transformation aus H auf ganz Y fortsetzen läßt.
- (ii) Jede im Sinne von (i) definierte Transformationsgruppenübersetzung $(G, X) \rightarrow (H, Y)$ induziert durch die Zuordnungsvorschrift $g \mapsto (\gamma(x) \mapsto \gamma(g(x)))$ einen Gruppenhomomorphismus $\gamma_{\#} : G \rightarrow H$.

(iii) Eine "(WST-)Kategorietransformation" ist ein Funktor

$\Gamma : \text{WST}(G, X) \rightarrow \text{WST}(H, Y)$, der wie folgt mit Hilfe einer Transformationsgruppenübersetzung $\gamma : (G, X) \rightarrow (H, Y)$ erklärt werden kann:

(1.) Jedem Objekt $(M, \mathcal{A}) \in \text{obj}(\text{WST}(G, X))$ wird ein Objekt

$\Gamma(M, \mathcal{A}) = (\Gamma(M), \Gamma(\mathcal{A})) \in \text{obj}(\text{WST}(H, Y))$ wie folgt zugeordnet:

- ▷ $\Gamma(M) = M$ als topologischer Raum. Die Bezeichnung $\Gamma(M)$ ist dennoch für diejenigen Fälle sinnvoll, in denen wir darauf verzichten, den maximalen Atlas gesondert mit aufzuführen.
- ▷ Sei $\mathcal{A} = \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$. Dann ist

$$\mathcal{A}' = \{(U_i, \gamma \circ \phi_i) \mid i \in I, \phi_i(U_i) \text{ ist ein Homöomorphiebereich von } \gamma\},$$

und

$$\Gamma(\mathcal{A}) := \widehat{(\mathcal{A}')}^H,$$

d.h. die Maximalisierung von $\mathcal{A}'$ in der Strukturgruppe H im Sinne von A.1.7.

- (2.) Jedem Morphismus $f \in \text{mor}(\text{WST}(G, X))$, $f : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M', \mathcal{A}')$ wird $\Gamma(f) = f$ als Morphismus aus $\text{mor}(\text{WST}(H, Y))$ zugeordnet.

- (iv) Als "Strukturtransformation" bezeichnet man die von einer Kategorietransformation $\text{WST}(G, X) \rightarrow \text{WST}(H, Y)$ induzierte Abbildung zwischen den Strukturklassenmengen

$$\bar{\Gamma} : \overline{\text{WST}(G, X)} \rightarrow \overline{\text{WST}(H, Y)}.$$

1.4 Kommentare:

- (i) Ist die Transformationsgruppenübersetzung γ eine bijektive Abbildung, so ist der gemäß 1.3(ii) induzierte Homomorphismus $\gamma_{\#}$ zwischen G und H diejenige Operation, die jedem $g \in G$ die durch Konjugation mit γ entstehende Abbildung $\gamma \circ g \circ \gamma^{-1} \in H$ zuordnet.
- (ii) Seien $\text{WST}(G, G)$ und $\text{WST}(H, H)$ Kategorien im Sinne von Bemerkung A.1.9(iii) und $\gamma : G \rightarrow H$ ein lokal homöomorpher Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann ist γ auch eine Transformationsgruppenübersetzung $(G, G) \rightarrow (H, H)$ mit $\gamma_{\#} = \gamma$.
- (iii) Ein wichtiger Sonderfall von Transformationsgruppenübersetzungen entsteht falls zwei Gruppen G und H mit $G \subset H$ auf X operieren. Dann bildet $\gamma = \text{Id} : (G, X) \rightarrow (H, X)$ eine Transformationsgruppenübersetzung, wobei die kanonische Inklusion $i = \gamma_{\#} : G \hookrightarrow H$ induziert wird. Analog zu A.3.1 nennen wir in dem Fall die Kategorie $\text{WST}(G, X)$ "restriktiver als" $\text{WST}(H, X)$.

1.5 Definition: Sei G eine Transformationsgruppe und $\wp$ eine Pseudogruppe, die auf X operieren. Für alle $U \overset{\text{offen}}{\subset} X$ und alle $g \in G$ gelte: $(U, g_U) \in \wp$. Dann ist durch diese Inklusion analog zu 1.4(iii) und 1.3(i)–1.3(iii) ein kanonischer Funktor $\Gamma : \text{WST}(G, X) \rightarrow \text{ST}(\wp, X)$ erklärt, den wir auch als Kategorietransformation bezeichnen. Auch in dem Fall nennen wir $\text{WST}(G, X)$ "restriktiver als" $\text{ST}(\wp, X)$.

1.6 Bezeichnungen für Kategorietransformationen:

- (i) Sei $\gamma : (G, X) \rightarrow (H, Y)$ eine Transformationsgruppenübersetzung. Dann nennen wir die durch γ im Sinne von 1.3(iii) induzierte Kategorietransformation Γ_{γ} .
- (ii) Eine im Sinne von 1.4(iii) oder 1.5 durch Inklusion $G \subset H$ und/oder $X \subset Y$ induzierte Kategorietransformation $\text{WST}(G, X) \rightarrow \text{WST}(H, Y)$ bezeichnen wir als $\Gamma_{(H, Y)}^{(G, X)}$.
- (iii) Sei G eine Liegruppe und $\tilde{G}$ deren universelle Überlagerung. Die nach 1.4(ii) durch die Überlagerungsprojektion induzierte Kategorietransformation $\text{WST}(\tilde{G}, \tilde{G}) \rightarrow \text{WST}(G, G)$ bezeichnen wir als $\Gamma_{(G, G)}^{(\tilde{G}, \tilde{G})}$.

1.7 Liste der in dieser Arbeit auftretenden Kategorietransformationen:

- (i) Da die Translationen eine Untergruppe der Ähnlichkeitsabbildungen sind, ist nach 1.4(iii)/1.6(ii) die Kategorietransformation $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})} : \text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow \text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ erklärt. Damit kann die Klassifikation der euklidischen Ähnlichkeitstori (auch bei nicht vorausgesetzter Standarddarstellung) auf den in Abschnitt C besprochenen metrischen Fall zurückgeführt werden.
- (ii) Exp und Log (definiert nach A.2.8(iii)/A.2.8(iv)) bilden, da sie nach A.2.13(2) Lie-Gruppen-Homomorphismen sind, nach 1.4(ii), 1.6(i) zueinander inverse Kategorietransformationen:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Exp}} \\ \text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) &\overset{\Gamma_{\text{Exp}}}{=} \text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*) \\ \Gamma_{\text{Log}} \end{aligned}$$

Da Exp und Log zueinander invers sind, gilt das auch für die Strukturtransformationen $\overline{\Gamma}_{\text{Exp}}$ und $\overline{\Gamma}_{\text{Log}}$. Sie sind daher bijektiv.

(iii) Die Kategorietransformation

$\Gamma_{(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)}^{(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)} : \text{WST}(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*) \rightarrow \text{WST}(C^*, C^*)$ ist nach 1.4(ii)/1.6(iii) erklärt. Die Überlagerungsprojektion Cpl (definiert in A.2.8(i)) ist dabei die zugrundeliegende Transformationsgruppenübersetzung.

(iv) Gemäß 1.6(ii) entsteht durch die kanonische Inklusion der Grundmannigfaltigkeiten $C^* \hookrightarrow C$ die Kategorietransformation $\Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)} : \text{WST}(C^*, C^*) \rightarrow \text{WST}(C^*, C)$.

(v) Da alle durch C^* beschriebenen Drehsteckungen um den Nullpunkt insbesondere Ähnlichkeitsabbildungen sind, entsteht nach 1.4(iii)/1.6(ii) die Kategorietransformation $\Gamma_{(\text{Aut}(C), C)}^{(C^*, C)} : \text{WST}(C^*, C) \rightarrow \text{WST}(\text{Aut}(C), C)$.

(vi) Durch Verkettung der zuletzt genannten drei Kategorietransformationen entsteht $\Gamma_{\text{Cpl}} := \Gamma_{(\text{Aut}(C), C)}^{(C^*, C)} \circ \Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)} \circ \Gamma_{(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)}^{(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*)}$ als Abbildung $\Gamma_{\text{Cpl}} : \text{WST}(\tilde{C}^*, \tilde{C}^*) \rightarrow \text{WST}(\text{Aut}(C), C)$. Die Funktion Cpl wird dabei (anders als in A.2.8(i)) als Abbildung $\tilde{C}^* \rightarrow C$ aufgefaßt. Damit ist die Bezeichnung Γ_{Cpl} konsistent zu 1.6(i). Somit wird durch 1.3(iii)/1.6(i) genau dieselbe Zuordnungsvorschrift erklärt, die wir unter dem gleichen Namen bereits bei der Definition der Standarddarstellung der echten Ähnlichkeitstori in A.2.15 konstruiert haben.

(vii) Da nach A.2.8(iv)/A.2.8(i) $\text{exp} = \text{Cpl} \circ \text{Exp}$ gilt, gilt Analoges für die nach (ii) und (vi) erklärten Kategorietransformationen. Es ist also $\Gamma_{\text{exp}} := \Gamma_{\text{Cpl}} \circ \Gamma_{\text{Exp}}$ und somit Γ_{exp} eine Kategorietransformation $\text{WST}(C, C) \rightarrow \text{WST}(\text{Aut}(C), C)$, die von der in (i) erklärten wohl zu unterscheiden ist. Mit Hilfe von Γ_{exp} werden wir die Klassifikation der echten Ähnlichkeitstori auf die Klassifikation der nach Abschnitt C zu behandelnden Kategorie $\text{WST}(C, C)$ zurückführen. Die Bezeichnung Γ_{exp} ist konsistent zur Definition 1.6(i).

(viii) Da alle Ähnlichkeitsabbildungen aus $\text{Aut}(C)$ insbesondere holomorph sind, ist gemäß 1.5/1.6(ii) die Kategorietransformation $\Gamma_{(C^\omega, C)}^{(\text{Aut}(C), C)} : \text{WST}(C, C) \rightarrow \text{ST}(C^\omega, C)$ erklärt. Diese wird vor allem in Abschnitt E betrachtet, um das Ergebnis unserer Klassifikation mit dem der riemannschen Flächen (vgl. A.2.2(v)) in Beziehung zu setzen.

Von Interesse für den Vergleich der Klassifikationen innerhalb von verschiedenen WST - und ST -Kategorien ist natürlich auch eine Verträglichkeit zwischen den Kategorietransformationen einerseits und der Holonomie bzw. den globalen Karten andererseits.

1.8 Lemma-Definition der durch eine Kategorietransformation induzierten Holonomie:

Sei $M \in \text{obj}(\text{WST}(G, X))$ und $\Gamma : \text{WST}(G, X) \rightarrow \text{WST}(H, Y)$ eine Kategorietransformation, die gemäß 1.3 durch die Transformationsgruppenübersetzung γ induziert ist. Sei (U, ϕ) eine Karte von M und entsprechend 1.3(iii(1.)) dann $(U, \gamma \circ \phi)$ eine Karte von $\Gamma(M)$. Dann entsteht zwischen der Holonomie $\hat{h}_\phi$ von M und der Holonomie $\hat{h}_{\gamma \circ \phi}$ von $\Gamma(M)$ die Beziehung

$$\gamma_\# \circ \hat{h}_\phi = \hat{h}_{\gamma \circ \phi},$$

wobei $\gamma_\#$ gemäß 1.3(ii) definiert ist.

Beweis: Sei $w : [a, b] \rightarrow M$ ein Weg. Die Schar $\{\psi_t \mid t \in [a, b]\}$ entstehe, indem der von ϕ am Punkt P induzierte Keim längs w quasianalytisch zu Keimen fortgesetzt werde, die nach X abbilden. Analog ergibt sich $\{\gamma \circ \psi_t \mid t \in [a, b]\}$ als quasianalytische Fortsetzung von $\gamma \circ \phi$ längs w zu Keimen, die nach Y abbilden. Gemäß B.1.6 ist $\hat{h}_\phi(w) = \psi_b \circ \psi_a^{-1}$ und $\hat{h}_{\gamma \circ \phi}(w) = (\gamma \circ \psi_b) \circ (\gamma \circ \psi_a)^{-1}$. Nach 1.3(ii) ist die für alle $x \in X$ definierte Abbildung $\gamma(x) \mapsto \gamma(\hat{h}_\phi(w))(x)$ quasianalytisch auf Y fortsetzbar. Mit der Eindeutigkeit der quasianalytischen Fortsetzung nach B.1.4 ergibt sich diese Abbildung, die nach 1.3(ii) $\gamma_\#(\hat{h}_\phi(w))$ heißt, als die gesuchte Holonomie $\hat{h}_{\gamma \circ \phi}(w)$ von $\Gamma(M)$. $\square$

1.9 Lemma-Definition der durch eine Kategorietransformation induzierten globalen Karte:

Sei $M \in \text{obj}(\text{WST}(G, X))$, $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ eine Überlagerung gemäß A.2.17(ii) und $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow X$ eine globale Karte von M . Sei $\Gamma : \text{WST}(G, X) \rightarrow \text{WST}(H, Y)$ die durch die Transformationsgruppenübersetzung γ induzierte Kategorietransformation. Dann ist $\gamma \circ \Phi$ eine globale Karte von $\Gamma(M)$.

Beweis: Nach 1.3(iii(2.)) ist $\Phi : \Gamma(\widetilde{M}) \rightarrow \Gamma(X)$ eine (H, Y) -strukturervhaltende Abbildung. Die Definition 1.3(iii(1.)) ergibt dabei, daß $\Gamma(X)$ durch den Atlas $\mathcal{A}_\gamma$ (vgl. Definition A.2.8(1)) zu einer (H, Y) -strukturierten Mannigfaltigkeit wird. Andererseits erkennt man unmittelbar, daß $\gamma : (X, \mathcal{A}_\gamma) \rightarrow (Y, \mathcal{A}_{Id})$ auch (H, Y) -strukturervhaltend ist. Wegen A.1.8(i) erfüllt $\gamma \circ \Phi$ somit die Definitionsbedingung C.2.1(i) und ist daher eine globale Karte der (H, Y) -Mannigfaltigkeit $\Gamma(M)$. $\square$

1.10 Definition: Bereits in Einl.0.3/A.2.4 und A.2.15 haben wir für eine Mannigfaltigkeit mit Ähnlichkeitsstruktur die Attribute “euklidisch” und “echt” eingeführt, je nachdem, ob die Struktur dieser Mannigfaltigkeit auch im Sinne von A.1.11 durch einen Atlas, als dessen Übersetzungsabbildungen nur Isometrien auftraten, beschrieben werden konnten oder nicht. Analog dazu definieren wir jetzt die Kategorien “ $\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ ” und “ $\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ ” als diejenigen Unterkategorien von “ $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ ”, die die Objekte mit echter bzw. euklidischer Ähnlichkeitsstruktur enthalten.

1.11 Zielbestimmung: In den nachfolgenden Paragraphen wird gezeigt:

- (i) Sei M eine geschlossene Mannigfaltigkeit aus $\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Dann induziert die Zuordnung $M \mapsto \hat{h}(M)$ eine Bijektion $\overline{\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C})} \rightarrow \{ \text{Gitter} \mid \text{Definition wie in B.1.20} \}$ (siehe 2.1).
- (ii) $\text{Bild}(\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}) = \overline{\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}$ (siehe 2.6).
- (iii) $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(\overline{M_1}) = \Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(\overline{M_2})$ genau dann, wenn $\hat{h}(M_1)$ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ konjugiert zu $\hat{h}(M_2)$ ist (siehe 2.7).
- (iv) $\text{Bild}(\overline{\Gamma_{\text{exp}}}) = \overline{\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}$ (siehe 3.1/3.4/4.1/4.2)
- (v) $\overline{\Gamma_{\text{exp}}}$ ist injektiv (siehe 3.2/3.5/4.1/4.2).

§2: Klassifikation der geschlossenen Flächen mit echter Ähnlichkeitsstruktur.

2.1 Lemma: Die geschlossenen Flächen mit (C, C) -Struktur werden nach dem in 1.11(i) beschriebenen Schema durch die Gitter klassifiziert.

Beweis: Auf die Kategorie $WST(C, C)$ ist das Kriterium C.3.1 anwendbar. Nach C.2.9 wird $WST(C, C)$ daher durch die Konjugationsklassen der möglichen Holonomiegruppen klassifiziert. Dies können genau all die Untergruppen der durch die Linksoperationen von C auf sich beschriebenen Translationsgruppe sein, die eigentlich diskontinuierlich und frei so auf C operieren, daß der entstehende Orbitraum eine geschlossene Mannigfaltigkeit ist. Da eine einfache Diskussion der Untergruppen von C ergibt, daß alle diskret operierenden Gruppen höchstens zwei linear unabhängige Erzeugende haben können ([FL].VII.6.2) und da die Orbiträume der nur von einem Erzeugenden erzeugten Orbiträume nicht geschlossen sind, bleiben die Gitter als einzige mögliche Holonomiegruppen der geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus (C, C) übrig. Umgekehrt tritt ja jedes Gitter H zumindest als Holonomiegruppe der (C, C) -Mannigfaltigkeit C/H auf (vgl. B.1.19(ii)). Da C abelsch ist und die Konjugationsklassen mithin trivial, ergibt sich die Behauptung dieses Lemmas.

2.2 Korollar: Aus dem Beweis von 2.1 und den Aussagen C.2.8/C.2.9, die ja dabei benutzt werden, ergibt sich, daß jede geschlossene Mannigfaltigkeit aus $WST(C, C)$ strukturgleich zu einem Quotienten C/H ist, wobei H ein Gitter ist.

2.3 Bemerkung: Alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus $WST(C, C)$ sind Tori. Implizit haben wir dafür im Zuge dieser Arbeit bereits zwei verschiedene Beweise erbracht, nämlich:

- (i) Da $WST(C, C)$ nach A.3.1 restriktiver ist als $WST(\text{Aut}(C), C)$, gilt die Aussage von A.4.1 auch für $WST(C, C)$.
- (ii) Im Rahmen des Beweises von 2.1/2.2 haben wir gezeigt, daß alle diese Mannigfaltigkeiten homöomorph zu einem Orbitraum C/H sind, wobei H ein Gitter ist. Auch deshalb müssen es Tori sein.

2.4 Lemma: Sei $M \in \text{obj}(WST(\text{Aut}(C), C))$. Dann gilt:

- ▷ M hat euklidische Ähnlichkeitsstruktur.
 $\iff$ Die Holonomiegruppe von M enthält keine Abbildungen mit Streckfaktor.
- ▷ M hat echte Ähnlichkeitsstruktur.
 $\iff$ Die Holonomiegruppe von M enthält Abbildungen mit Streckfaktor.

Beweis: Es genügt, beide Richtungen der ersten Äquivalenz zu zeigen, da die zweite Äquivalenz die Negation der ersten ist.

“ $\rightarrow$ ” Hat M euklidische Ähnlichkeitsstruktur, so können wir den in Definition 1.10/A.2.4 angesprochenen Atlas $\mathcal{A}'$, bzw. die durch ihn induzierte Überdeckung von M benutzen, um gemäß B.1.2/B.1.3(i) die quasianalytische Fortsetzung einer Anfangskarte zu konstruieren, wodurch nach B.1.6 die Holonomie abgelesen werden kann. Streckfaktoren können dann unmöglich in der Holonomiegruppe auftreten.

“ $\Leftarrow$ ” Gemäß C.2.4(ii) enthält der durch die globale Karte induzierte Atlas $\mathcal{A}_\sharp$ keine Übersetzungsabbildung mit Streckfaktor. $\square$

2.5 Lemma: Die Holonomiegruppen aller geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus $\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ sind Gitter gemäß Definition B.1.20.

Beweis: Eine geschlossene Mannigfaltigkeit aus $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ ist gemäß A.4.1 ein Torus. Da die Holonomie nach B.1.11 ein Homomorphismus ist, müssen die Holonomiegruppen der geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ abelsche von bis zu zwei Elementen zu erzeugende Untergruppen von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ sein. Sieht man einmal von der Identität ab, so besteht $\text{Aut}(\mathbb{C})$ nur aus den fixpunktfreien Abbildungen und den Drehstreckungen (die Grenzfälle reiner Drehungen und reiner Streckungen einmal mit eingeschlossen), die jeweils genau einen Fixpunkt haben. Abelsche Untergruppen entstehen immer nur höchstens (aber auch: immer genau) dann, wenn (abgesehen von der Identität) entweder nur Translationen, oder nur Drehstreckungen, Drehungen und Streckungen mit demselben Fixpunkt in der Untergruppe liegen. Unter Berücksichtigung von 2.4 ergibt sich so, daß M nur dann ein euklidischer Ähnlichkeitstorus sein kann, wenn seine $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Holonomie entweder nur aus Translationen oder nur aus reinen Drehungen um einen festen Punkt besteht. Da nach Definition in 1.10 ein euklidischer Ähnlichkeitstorus stets auch durch einen $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Atlas beschrieben werden kann, können wir mit Hilfe dieses Atlases ein Objekt $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C}))$ konstruieren, sodaß $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}(M') = M$ ist. Nach 1.8/1.4(iii) hat M' dieselbe Holonomie wie M . Es ist damit nach C.3.1/C.2.8 $(\text{Iso}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -strukturerhaltend zu $\mathbb{C}/\hbar(M')$. Damit muß $\hbar(M) = \hbar(M')$ ein Gitter sein, denn in allen anderen Fällen, die aufgrund der obigen Überlegungen noch möglich wären, wäre der Orbitraum $M'/\hbar(M')$ keine geschlossene Mannigfaltigkeit. $\square$

Wir sind jetzt in der Lage, die Behauptung 1.11(ii) zu zeigen:

2.6 Lemma: $\text{Bild}(\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}) = \text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$

Beweis: Sei M ein geschlossenes Objekt aus $\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Nach 2.5 ist die Holonomiegruppe von M damit ein Gitter. Nach C.2.4(ii) existiert somit ein Atlas $\mathcal{A}$, der die Struktur von M beschreibt, und dessen Übersetzungsabbildungen ausschließlich durch Translationen dargestellt werden können. Damit existiert zu $M \in \text{obj}(\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}))$ ein Translationstorus $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$, nämlich $M' = (M, \tilde{\mathcal{A}})$ sodaß $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(M') = M$ ist. Von daher gilt: $\text{Bild}(\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}) \supset \text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Andererseits ist nach Definition die Struktur aller Bildobjekte der Kategorietransformation $\Gamma_{\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}$ im Sinne von A.1.11 durch $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -Atlanten beschreibbar, nach Definition 1.10 also eine euklidische Ähnlichkeitsstruktur. $\square$

2.7 Bemerkung: Die Aussage 1.11(iii), wonach $\overline{\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(\overline{M_1})} = \overline{\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(\overline{M_2})}$ genau dann gilt, wenn die zugehörigen Holonomiegruppen in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ zueinander konjugiert sind, haben wir implizit in mehreren Teilschritten damit in dieser Arbeit bereits abgeleitet: Zum einen wissen wir ja nach 2.1–2.3, daß alle geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus $\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ strukturgleich zu Orbiträumen des Typs $\mathbb{C}/H$ sind, wobei H ein

Gitter ist. Andererseits haben wir ja das Bild unter $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}, \mathbb{C})}$ dieser Orbiträume (das sind ja gerade die euklidischen Ähnlichkeitstori gemäß A.2.4) in B.1.21 nach den Konjugationsklassen dieser Gitter H klassifiziert. Ferner wissen wir aus B.1.19/1.8/1.4(iii), daß diese Gitter zugleich die Holonomiegruppen unserer Objekte sind. $\square$

2.8 : Damit sind also alle Mannigfaltigkeiten von $\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ zu einem der in Standarddarstellung gegebenen euklidischen Ähnlichkeitstori strukturerhaltend homöomorph. Insofern ist ein Teil des in 0.1/A.2.16 angesprochenen dritten Klassifikationssatzes bereits gezeigt.

§3: Die Bijektivität von $\overline{\Gamma_{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)}^{(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)}}$ und von $\overline{\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})}}$

Wir zeigen, daß $\overline{\Gamma_{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)}^{(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)}}$, definiert gemäß 1.7(iii), surjektiv ist, indem wir allgemein beweisen:

3.1 Lemma: Sei G eine Lie-Gruppe und $p: \tilde{G} \rightarrow G$ ihre universelle Überlagerung im Sinne der Lie-Gruppen-Theorie. Dann gilt: $\overline{\Gamma_{(G, G)}^{(\tilde{G}, \tilde{G})}}$ ist surjektiv, zur Definition dieser Abbildung vergleiche 1.6(iii).

Beweis: (Es sei $\Gamma := \Gamma_{(G, G)}^{(\tilde{G}, \tilde{G})} = \Gamma_p$ in diesem Beweis.)

Sei $(M, \mathcal{A}) \in \text{obj}(\text{WST}(G, G))$. Es sei dann $\mathcal{A}' := \{(U_i, \phi_i) \mid i \in I\}$ derjenige Teilatlas unseres maximalen Atlas $\mathcal{A}$, der genau aus denjenigen Karten von $\mathcal{A}$ mit einfach zusammenhängender Koordinatenumgebung U_i besteht. Für jedes $i \in I$ wählen wir mit V_i dann genau eine Zusammenhangskomponente von $p^{-1}(U_i)$. Mit

$$\mathcal{A}'' := \{(U_i, (p_{V_i})^{-1} \circ \phi_i) \mid i \in I\}$$

entsteht dann ein Atlas für M . Nach Definition haben alle Übersetzungsabbildungen dieses Atlas die Form: $(p_{V_i})^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ (p_{V_i})$. Sei $W_{i,j,k}$ eine Zusammenhangskomponente von $((p_{V_i})^{-1} \circ \phi_i)(U_i \cap U_j)$. Da $\mathcal{A}'$ nach Voraussetzung ein (G, X) -Atlas ist, operiert $(\phi_i \circ \phi_j^{-1})|_{p(W_{i,j,k})}$ als Linksmultiplikation mit einem Element aus G , das wir $g_{i,j,k}$ nennen. Für $x \in W_{i,j,k}$ betrachten wir die Abbildung

$$\lambda_{i,j,k}: x \mapsto ((p_{V_i})^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_i^{-1} \circ (p_{V_i}))(x) \cdot x^{-1},$$

wobei “ $\cdot$ ” hier das Produkt in $\tilde{G}$ meint. Von dieser Abbildung läßt sich einerseits einsehen, daß sie stetig ist und andererseits nachrechnen, daß $\text{Bild}(p \circ \lambda_{i,j,k}) = \{g_{i,j,k}\}$ ist. Da letzteres impliziert, daß $\text{Bild}(\lambda_{i,j,k}) \subset p^{-1}\{g_{i,j,k}\}$ und dies eine diskrete Menge ist, folgt so die Konstanz aller Abbildungen $\lambda_{i,j,k}$. Dadurch wird nachgewiesen, daß alle Übersetzungsabbildungen, die bei $\mathcal{A}''$ entstehen, pro Zusammenhangskomponente ihres Definitionsbereichs Einschränkung einer Linksoperation von $\tilde{G}$ auf sich sind, d.h. daß $\mathcal{A}''$ ein $(\tilde{G}, \tilde{G})$ -Atlas ist. $\mathcal{A}''$ ist gerade so definiert worden, daß $(M, \widetilde{\mathcal{A}''}) \in \text{obj}(\text{WST}(\tilde{G}, \tilde{G}))$ mit $\overline{\Gamma}(M, \widetilde{\mathcal{A}''}) = \overline{(M, \mathcal{A})}$ ist. Also ist $\overline{\Gamma}$ surjektiv. $\square$

3.2 Lemma: Es seien dieselben Voraussetzungen und Bezeichnungen wie in Lemma 3.1 gegeben. Dann ist $\Gamma_{(\mathcal{C}^*, \mathcal{C}^*)}^{(\tilde{\mathcal{C}}^*, \tilde{\mathcal{C}}^*)}$ injektiv.

Beweis: Seien $M_1, M_2 \in \text{WST}(\tilde{G}, \tilde{G})$ und $p_i : \tilde{M}_i \rightarrow M_i$ für $i \in \{1, 2\}$ ihre universellen Überlagerungen. Es gelte $\bar{\Gamma}(\tilde{M}_1) = \bar{\Gamma}(\tilde{M}_2)$. Von daher muß eine (G, G) -struktur erhaltende Abbildung $f : M_1 \rightarrow M_2$ existieren. Die gemäß Lemma A.2.17(iii) (G, G) -struktur erhaltende Liftung auf die universellen Überlagerungen nennen wir $\tilde{f} : \tilde{M}_1 \rightarrow \tilde{M}_2$. Mit $\Phi_i : \tilde{M}_i \rightarrow \tilde{G}$ ($i \in \{1, 2\}$) bezeichnen wir die globalen Karten von M_1 bzw. M_2 . Da $p : \tilde{G} \rightarrow G$ in dem Fall sowohl Überlagerungsprojektion als auch Lie-Gruppen-Homomorphismus ist, als auch im Sinne von 1.4(ii) die Γ induzierende Transformationsgruppenübersetzung, können gemäß Lemma 1.9 die Abbildungen $p \circ \Phi_i$ als globale Karten der $\Gamma(M_i)$ aufgefaßt werden. Von daher können wir feststellen, daß $p \circ \Phi_1$ und $p \circ \Phi_2 \circ \tilde{f}$ beides (G, G) -struktur erhaltende Abbildungen $\tilde{M}_1 \rightarrow G$ sind. Aufgrund der Charakterisierung einer Abbildung als globale Karte gemäß C.2.1(i) und der Eindeutigkeit der globalen Karte (C.2.1(ii)) folgt somit die Existenz eines Elementes $g \in G$, sodaß

$$(1) \quad \ell_g \circ p \circ \Phi_1 = p \circ \Phi_2 \circ \tilde{f}$$

ist, wobei ℓ_g die Linksmultiplikation mit g meint. Indem wir Φ_i als Liftung von $p \circ \Phi_i$ nach $\tilde{G}$ auffassen ($i \in \{1, 2\}$), können wir mit denselben Argumenten wie beim Surjektivitätsbeweis (vgl. 3.1) die Existenz eines $\tilde{g} \in \tilde{G}$ nachweisen, sodaß

$$(2) \quad \ell_{\tilde{g}} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ \tilde{f}$$

ist, denn Φ_1 und $\Phi_2 \circ \tilde{f}$ haben ähnliche Eigenschaften wie die dort betrachteten Koordinatenabbildungen. Aus Gleichung (2) und den Aussagen A.1.8(i), A.1.8(iii) können wir dann schließen, daß auch $\tilde{f} \in \text{mor}(\text{WST}(\tilde{G}, \tilde{G}))$ ist. Analog ergibt sich mit A.1.8(iv) aus dem kommutativen Diagramm $f \circ p_1 = p_2 \circ \tilde{f}$, das bei der Konstruktion von $\tilde{f}$ als Liftung von f entsteht, auch für f die Eigenschaft, $(\tilde{G}, \tilde{G})$ -struktur erhaltend zu sein. Da f ja bereits nach Konstruktion ein Homöomorphismus ist, folgt mit A.1.8(ii) $\bar{M}_1 = \bar{M}_2$ in $\text{WST}(\tilde{G}, \tilde{G})$ und somit in Injektivität von $\bar{\Gamma}$. $\square$

3.3 Bemerkung und Definition: Eine analoge Diskussion wie die in 2.5 durchgeführte ergibt für die echten Ähnlichkeitstori, daß deren Holonomiegruppe H nur aus Drehstreckungen (Drehungen und Streckungen eingeschlossen) mit demselben Fixpunkt bestehen kann (abgesehen von der Identität). Eine solche Gruppe hat zwei oder ein Erzeugendes (vgl. B.1.24); wegen 2.4 muß es Abbildungen mit von 1 verschiedenen Streckfaktoren geben. In jedem Fall haben alle nicht-identischen Abbildungen von H genau einen Fixpunkt, und zwar den gemeinsamen. Dieser Punkt P , der erst durch die genaue Wahl der Holonomiegruppe H oder einer zu H verträglichen globalen Karte Φ fixiert wird (vgl. C.2.3) heißt “*Streckzentrum der Holonomie*”.

3.4 Lemma: Das Bild der gemäß 1.7(v) erklärten Strukturtransformation $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})}$ ist $\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$.

Beweis: Sei M ein echter Ähnlichkeitstorus, Φ seine globale Karte und $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ die zugehörige universelle Überlagerung gemäß A.2.17(ii). Es gilt ein Urbild von $\widetilde{M}$ unter $\overline{\Gamma}$ nachzuweisen. Sei P das Streckzentrum der Holonomie gemäß 3.3 bezüglich Φ und τ_P die Translation $z \mapsto z + P$. Damit können wir $\widetilde{M}'$ als das gesuchte Urbild konstruieren: Sei

$$M' := (M, p(\widetilde{\mathcal{A}_{\tau_P^{-1} \circ \Phi}})^{C^*}) \in \text{obj}(\text{WST}(C^*, C^*)),$$

wobei $p(\widetilde{\mathcal{A}_{\tau_P^{-1} \circ \Phi}})^{C^*}$ der nach C.2.4(1) durch die globale Karte $\tau_P^{-1} \circ \Phi$ induzierte Atlas von M ist.

3.5 Lemma: Die gemäß 1.7(v) erklärte Strukturtransformation $\overline{\Gamma}_{(\text{Aut}(C), C)}^{(C^*, C)}$ ist injektiv.

Beweis: Sei $\Gamma := \Gamma_{(\text{Aut}(C), C)}^{(C^*, C)}$ und M_1, M_2 geschlossene (C^*, C) -strukturierte Mannigfaltigkeiten, für die $\overline{\Gamma}(\widetilde{M}_1) = \overline{\Gamma}(\widetilde{M}_2)$ gilt. Wir betrachten dann das kommutative Diagramm:

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} M_1 & \xleftarrow{p_1} \widetilde{M}_1 & \xrightarrow{\Phi_1} C \\ \downarrow f & \downarrow \tilde{f} & \downarrow \varphi \\ M_2 & \xleftarrow{p_2} \widetilde{M}_2 & \xrightarrow{\Phi_2} C \end{array}$$

Dieses Diagramm entsteht, indem für $\nu \in \{1, 2\}$ zunächst zu den M_ν gemäß A.2.17(ii) die universellen Überlagerungen p_ν und anschließend gemäß C.2.2(i) die globalen Karten Φ_ν konstruiert werden. Die so entstehenden Abbildungen p_1, p_2, Φ_1, Φ_2 werden zunächst als (C^*, C) -erhaltende Abbildungen konstruiert, sind aber wegen $C^* \subset \text{Aut}(C)$ auch $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturserhaltende Abbildungen zwischen denen durch Anwendung von Γ gebildeten Räumen. Sei dann f ein $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturserhaltender Homöomorphismus, wie er wegen $\overline{\Gamma}(\widetilde{M}_1) = \overline{\Gamma}(\widetilde{M}_2)$ existieren muß. $\tilde{f}$ entstehe dann als $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturserhaltende Liftung in die universelle Überlagerungen und macht das linke Kästchen zu einem kommutativen Diagramm. Als Liftung eines Homöomorphismus zwischen den Basisräumen M_1 und M_2 ist $\tilde{f}$ verträglich mit den auf den $\widetilde{M}_\nu$ operierenden Deckbewegungsgruppen: Zu jedem $T_1 \in \text{Deck}(M_1)$ existiert $T_2 \in \text{Deck}(M_2)$, sodaß $T_2 \circ \tilde{f} = \tilde{f} \circ T_1$ gilt. Da somit nach C.2.1(i) sowohl Φ_1 als auch $\Phi_2 \circ \tilde{f}$, als $(\text{Aut}(C), C)$ -strukturserhaltende Abbildungen globale Karten von $\Gamma(M_1)$ sind, gibt es es nach C.2.1(ii) eine Abbildung $\varphi \in \text{Aut}(C)$, die auch das rechte Kästchen kommutativ werden läßt. Mit C.2.3(iii), der lokalen Homöomorphie der globalen Karten und der Quasianalytizität von $\text{Aut}(C)$ (vgl. A.1.4) entsteht aus der Verträglichkeit $\tilde{f}$ gegenüber den Deckbewegungsgruppen eine Verträglichkeit von φ gegenüber den Holonomiegruppen (vgl. C.2.3(iv)): Zu jedem $\psi_1 \in \mathfrak{h}_{\Phi_1}(\Gamma(M_1))$ existiert ein $\psi_2 \in \mathfrak{h}_{\Phi_2}(\Gamma(M_2))$, sodaß $\psi_2 \circ \varphi = \varphi \circ \psi_1$ gilt. Da hier Γ gemäß 1.4(iii) eine durch die Identität induzierte Kategorietransformation ist und mithin nach 1.8/1.9 und globalen Karten und Holonomiegruppen von den M_ν zugleich globale Karten und Holonomiegruppen der $\Gamma(M_\nu)$ sind, sind die Abbildungen ψ_ν als Abbildungen der Holonomiegruppen von $\mathfrak{h}(M_\nu)$ höchstens Drehstreckungen (Sonderfälle eingeschlossen) um den Nullpunkt. Nach 3.3 kann jedoch ψ_1 stets so gewählt werden, daß es als Abbildung mit echtem Streckfaktor den Nullpunkt als einzigen Fixpunkt hat.

Aus dem kommutativen Diagramm " $\psi_2 \circ \varphi = \varphi \circ \psi_1$ " ergibt sich so, daß der Nullpunkt auch ein Fixpunkt von φ sein muß. Also ist φ eine C^* -Operation. Durch Diagrammjagd in (1) schließt man dann, daß damit $\tilde{f}$ und f auch (C^*, C) -strukturertretend sind. Es ist also auch $\overline{M_1} = \overline{M_2}$ und somit $\tilde{\Gamma}$ injektiv. $\square$

§4: Die Bijektivität von $\overline{\Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)}}$

Wir erwähnen bereits an dieser Stelle jenes Lemma, das zu beweisen die Hauptschwierigkeit in diesem Paragraphen ist.

4.1 Lemma: Sei M ein geschlossenes Objekt aus $WST(C^*, C)$ und Φ eine globale Karte von M . Dann gilt $0 \notin \text{Bild}(\Phi)$.

Der Beweis erfolgt unter Nummer 4.8.

4.2 Lemma: Die Bijektivität von $\overline{\Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)}}$ ist gewährleistet, falls Lemma 4.1 sich als wahr erweist.

Beweis: $\overline{\Gamma_{(C^*, C)}^{(C^*, C^*)}}$ (vgl. 1.7(iv)) ist injektiv, weil $WST(C^*, C)$ zwar mehr Punkte in der Grundmannigfaltigkeit enthält als $WST(C^*, C^*)$, aber nicht mehr Übersetzungsabbildungen. Damit kann die Injektivität nach dem in 3.5 vorgestellten Schema gezeigt werden.

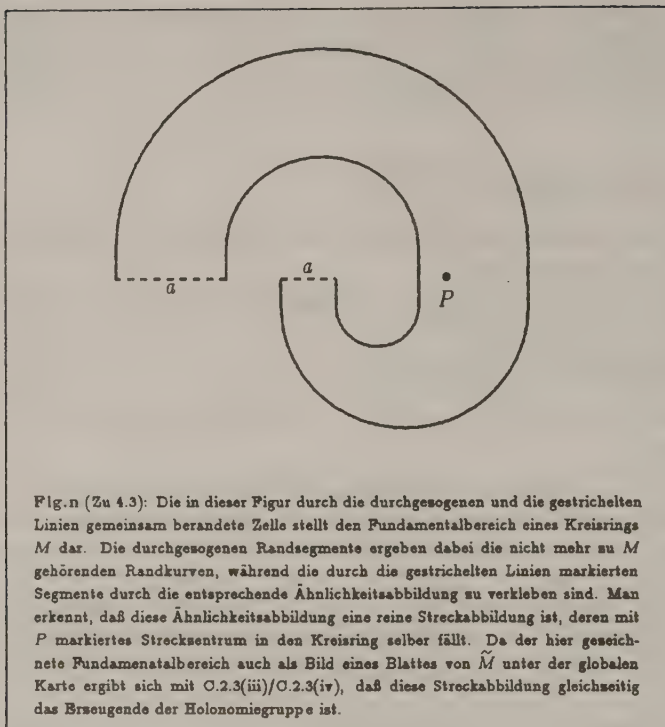
Enthält das Bild einer globalen Karte Φ eines (C^*, C) -Torus M nicht den Nullpunkt, so kann $M' \in \text{obj}(WST(C^*, C^*))$ mit Hilfe des durch die globale Karte von M induzierten Atlases $p(\mathcal{A}_\Phi)$ (vgl. C.2.4(ii)) so konstruiert werden, daß $\Gamma(M') = M$ gilt, nämlich:

$$M' := (M, p(\widetilde{\mathcal{A}_\Phi})^{C^*}). \quad \square$$

Es gilt dann also in diesem Paragraphen noch zu zeigen, daß das Bild der globalen Karte Φ eines (C^*, C) -Torus M (mit 3.4/3.5/1.3 praktisch also eines echten Ähnlichkeitstorus, bei dem das Streckzentrum der Holonomie im Nullpunkt liegt) dieses Streckzentrum nicht enthalten kann. Diese Eigenschaft liegt ein wenig tiefer, als es zunächst den Anschein haben mag. Nicht die besondere Art von C^* , in der Umgebung des Nullpunkts zu operieren, ergibt nämlich einen Widerspruch zu $0 \in \text{Bild}(\Phi)$, sondern erst der Versuch, ein oder mehrere zu einer Umgebung des Nullpunkts (C^*, C) -strukturgleiche Umgebungen noch zu einer geschlossenen Mannigfaltigkeit M fortzusetzen, wie durch das nachfolgende Beispiel deutlich wird:

4.3 Beispiel für eine nicht-geschlossene Mannigfaltigkeit $M \in \text{obj}(WST(C^*, C))$, bei der der Nullpunkt im Sinne von 3.3 das Streckzentrum der Holonomie ist, und bei der der Nullpunkt trotzdem im Bild jeder globalen Karte liegt:

Beweis: Der in Fig.n dargestellte Fundamentalbereich sei so nach C eingebettet, daß P mit in dem Nullpunkt zusammenfällt. M werde im Sinn von A.2.5 durch jenen Fundamentalbereich als (C^*, C) -Mannigfaltigkeit definiert. Jener nach C eingebettete Bereich kann dann als Bild eines Blattes von $\widetilde{M}$ unter der globalen Karte Φ aufgefaßt werden. Dabei wird die Klebeabbildung zu einer Abbildung aus der durch diese globale



Karte gemäß C.2.3(iv) induzierten Holonomiegruppe. Da der Kreisring nur ein Erzeugendes hat, sind alle Abbildungen der Holonomiegruppe Potenzen davon und der Punkt $P=0$ daher das Streckzentrum der Holonomiegruppe. Fig.n zeigt, daß es ohne weiteres möglich ist, daß dieses Streckzentrum in den Fundamentaltorus und damit in das Bild einer mit der Konstruktion der Holonomie verträglichen globalen Karte fällt. Jeder Versuch, diese Konstellation durch eine andere Konstruktion der Holonomiegruppe, der globalen Karte oder durch andere Wahl des Blattes, das durch die globale Karte eingebettet wird, zu vermeiden, scheitert. Denn nach den Eindeutigkeitsaussagen B.1.12/C.2.1(ii)/C.2.3(iii) gehen alle Neu-Konstruktionen nur durch Operationen mit C^* aus den alten Konstruktionen hervor. $\square$

4.4 Beweisskizze von 4.1

Wie bereits in Einl.0.4 angedeutet, zeigen wir in den nachfolgenden Punkten bis zum Ende dieses Paragraphen die Aussage 4.1, indem wir bei einem M , das 4.1 verletzt, die entsprechenden Punkte entfernen und so einen gelochten Torus M' erhalten; indem wir ferner die gelochte Ebene so ummetrisieren, daß C^* zu einer Gruppe von Isometrien wird und M' als bezüglich dieser neuen Metrik metrisch vollständig nachweisen;

indem wir dann mit dem Kriterium C.3.2 M' als WST-vollständig und somit die globale Karte von M' als Überlagerung nachweisen, und indem wir anschließend aus der Geometrieverträglichkeit zwischen M und M' folgern, daß auch die globale Karte von M , eingeschränkt auf das um die Urbilder der Null gelochte $\widetilde{M}$ eine Überlagerung sein müßte, was schließlich einen Widerspruch zur Überlagerungstheorie liefert.

4.5 Definition: Sei $x \in C^*$ und seien v_x, w_x Tangentialvektoren an C^* mit Fußpunkt x . Durch

$$(1) \quad \langle v_x, w_x \rangle_0 := \frac{\langle v_x, w_x \rangle_0}{\|x\|^2}$$

wird ein Skalarprodukt auf allen Tangentialräumen von C^* definiert, sodaß $(C^*, \langle \cdot, \cdot \rangle_0)$ zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit wird. Durch das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ wird auch ein Normbegriff für alle Tangentialvektoren definiert, sowie für jeden Weg $w : [a, b] \rightarrow C^*$ eine Weglänge

$$(2) \quad \ell_0(w) := \int_a^b \|w'(t)\|_0 = \int_a^b \frac{|w'(t)|}{|w(t)|} dt.$$

Damit wird auf C^* , wie in der Theorie der riemannschen Mannigfaltigkeiten üblich, die Metrik ρ_0 durch

$$(3) \rho_0(z, y) := \inf \{ \ell_0(w) \mid w : [a, b] \rightarrow C^* \text{ stetig differenzierbarer Weg, } w(a) = z, w(b) = y \}$$

erklärt. Die so eingeführten Begriffe $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, ℓ_0 , $\|\cdot\|_0$ und ρ_0 sind invariant gegenüber den C^* -Operationen; C^* bildet also eine Isometriengruppe von (C^*, ρ_0) . (Nach [Zas].§2 kann eine Metrik mit diesen Invarianzeigenschaften gegenüber einer Gruppe von Ähnlichkeitsabbildungen stets, insbesondere auch in allen höherdimensionalen Fällen, auf dem Komplement der Streckentrennmenge konstruiert werden, falls jene Gruppe transitiv operiert.)

4.6 Lemma: Sei ρ die übliche euklidische Metrik auf $\mathbb{C}$ und ρ_0 wie in 4.5(3) definiert. Dann gilt

- (i) $\exp : (C, \rho) \rightarrow (C^*, \rho_0)$ ist eine lokale Isometrie.
- (ii) (C^*, ρ_0) ist metrisch vollständig.

Beweis von (i): $\exp$ operiert invariant gegenüber den Weglängenbegriffen ℓ bzw. ℓ_0 , denn für jeden stetig differenzierbaren Weg $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$(1) \quad \begin{aligned} \ell_0(\exp \circ w) &= \int_a^b \frac{|(\exp \circ w)'(t)|}{|(\exp \circ w)(t)|} dt = \\ &= \int_a^b \left| \frac{\exp(w(t)) \cdot w'(t)}{\exp(w(t))} \right| dt = \int_a^b |w'(t)| dt = \ell(w). \end{aligned}$$

Da ρ und ρ_0 als riemannsche Metriken durch das Infimum der Weglängen der Verbindungswege erklärt sind (vgl. C.1.2/C.1.9/4.5(3)) und da durch $\exp$ jeder Weg von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{C} - \{0\} = C^*$ abgebildet wird, gilt für alle $z, y \in \mathbb{C}$:

$$(2) \quad \rho_0(\exp(z), \exp(y)) \leq \rho(z, y).$$

Wäre $\rho_0(\exp(z), \exp(y)) < \rho(z, y)$, so müßte ein Weg $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}^*$ mit $v(a) = \exp(z)$ und $v(b) = \exp(y)$ existieren, der nicht durch $v = \exp \circ w$ mit einem durch $\mathbb{C}$ von z nach y verlaufenden Weg dargestellt werden kann. Da aber $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$ eine Überlagerungsabbildung ist, ist v auf jeden Fall zu einem Weg $\tilde{v} : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ liftbar mit $\tilde{v}(a) = z$. Nach Konstruktion ist dann $\tilde{v}(b)$ ein Urbild von $\exp(y)$ unter $\exp$, also $\tilde{v}(b) \in \{y + 2\pi \cdot i \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Da umgekehrt jeder von z zu einem Punkt aus jener Menge führende Weg durch $\exp$ zu einem nach (1) gleich langen Weg zwischen $\exp(z)$ und $\exp(y)$ abgebildet wird, folgt:

$$(3) \quad \rho_0(\exp(z), \exp(y)) = \rho(z, \{y + 2\pi \cdot i \cdot k \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

Damit ist

$$(4) \quad \rho(z, y) = \rho_0(\exp(z), \exp(y)) \quad \forall y, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |\Im(y - z)| < \pi.$$

Zu (ii): Sei z_k eine nicht-konvergente Cauchy-Folge aus $(\mathbb{C}^*, \rho_0)$. Sei der Index N so gewählt, daß $\rho_0(z_k, z_N) < \frac{\pi}{2}$ für alle $k > N$ ist. Aus (4) folgt, daß die Umgebung $U_{\rho_0}(z_N, \frac{\pi}{2})$, die ja die gesamte Restfolge ab dem Index N enthält, sich isometrisch an der Abbildung $\exp$ nach $\mathbb{C}$ hochheben läßt; denn je zwei Punkte z_{k_1}, z_{k_2} mit $k_1, k_2 > N$ lassen sich miteinander durch einen Weg verbinden, der den Punkt z_N enthält und immer noch kürzer als π ist. Damit bildet auch die nach $\mathbb{C}$ hochgehobene Folge eine Cauchy-Folge, die wegen der metrischen Vollständigkeit von $\mathbb{C}$ einen Grenzwert hat. Das Bild dieses Grenzwertes unter der Exponentialabbildung ist dann ein Grenzwert für $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$. $\square$

4.7 Lemma: Sei M kompakt. $(M, \mathcal{A}) \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}))$ und $\Phi : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$ eine globale Karte von M , wobei $0 \in \text{Bild}(\Phi)$ gelte. Mit $p : \widetilde{M} \rightarrow M$ bezeichnen wir die universelle Überlagerung. Dann gilt:

- (i) $p(\Phi^{-1}\{0\}) \subset M$ besteht aus endlich vielen Punkten; $\Phi^{-1}\{0\}$ enthält dagegen mindestens so viele Punkte, wie die Überlagerung p Blätter hat.
- (ii) Sei $M' := M - p(\Phi^{-1}\{0\})$. Der Atlas $\mathcal{A}'$ entstehe durch Entfernen nämlicher Punkte aus den Karten von $\mathcal{A}$. Damit wird $(M', \mathcal{A}')$ zu einem Objekt von $\text{WST}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*, \rho_0))$ und gemäß C.1.2 und 4.5 zu einer riemannschen Mannigfaltigkeit.
- (iii) M' ist metrisch und WST-vollständig.

Beweis von (i): Weil Φ als strukturerhaltende Abbildung gemäß C.2.1/A.1.8 ein lokaler Homöomorphismus ist, ist $\Phi^{-1}\{0\}$ diskret in $\widetilde{M}$. Sei B ein Blatt von M in $\widetilde{M}$, das mindestens ein Urbild von 0 enthält. Weil $\overline{B}$ kompakt ist, ist $\Phi^{-1}\{0\} \cap \overline{B}$ endlich. Aus der Beziehung $\Phi \circ T_\alpha = h(\alpha) \circ \Phi$ (vgl. C.2.3(iii) und C.2.3(iv)) und dem Umstand, daß alle Abbildungen $h(\alpha) \subset \mathbb{C}^*$ den Punkt 0 als Fixpunkt haben müssen, erkennt man, daß die Deckbewegungsgruppe $\text{Deck}(M)$ invariant gegenüber $\Phi^{-1}\{0\}$ operiert. Von daher ist einerseits $p(\Phi^{-1}\{0\}) = p(\Phi^{-1}\{0\} \cap B)$ und somit endlich, andererseits enthält jedes Blatt mindestens so viele Punkte wie $\Phi^{-1}\{0\}$ in B .

Zu (ii): Die Wohldefiniertheit von $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*))$ ist nach (i) klar.

Da nach 4.5 $\mathbb{C}^*$ als Gruppe von Isometrien auf $(\mathbb{C}^*, \rho_0)$ operiert, folgt nach C.1.2, daß auch $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*, \rho_0)))$ eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Zu (iii): Zu zeigen ist ja nur die metrische Vollständigkeit; die WST-Vollständigkeit folgt aus Kriterium C.3.2.

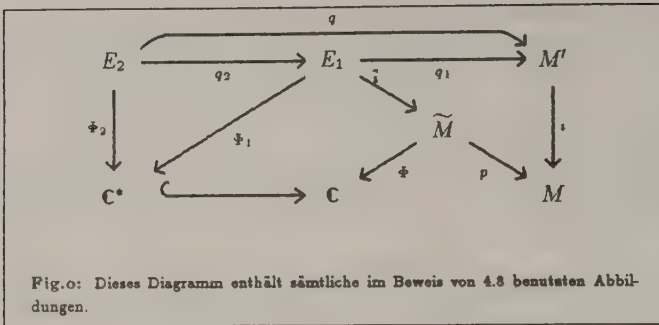
Gegeben sei eine Cauchy-Folge aus M' . Aufgrund der Cauchyfolgeneigenschaft folgt die Konvergenz jener Folge bereits aus der Konvergenz einer Teilfolge; wir wählen daher $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ als Teilfolge jener gegebenen Folge so, daß $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in der kompakten Mannigfaltigkeit M gegen ein z konvergiert.

1. Fall: $z \in M'$. Sei (U, ϕ) eine z überdeckende Karte, sodaß $\phi(U) \subset \mathbb{C}$ eine von 0 fern liegende Kreisscheibe ist. Dann ist ja $\{|x| \mid x \in \phi(U)\} =: A$ nach oben und nach unten durch positive Konstanten beschränkt. Da $z_k \rightarrow z$ in M gilt, gilt $\phi(z_k) \rightarrow \phi(z)$ in $\mathbb{C}$ bezüglich der üblichen euklidischen Norm $|\cdot|$. Wegen der Beschränktheit von A folgt aus dem Vergleich der Weglängenformel 4.5(2) mit der üblichen euklidischen Weglänge C.1.9(1), daß $\phi(z_k) \rightarrow \phi(z)$ auch in $(\mathbb{C}, \rho_0)$ gilt. Nach Definition der induzierten Metrik auf M' gemäß C.1.2/C.1.3 ergibt sich so: $z_k \rightarrow z$ auch in M' .

2. Fall: $z \in p(\Phi^{-1}\{0\})$. Sei (U, ϕ) eine Umgebung von z in M . Dann ist $\phi(z) = 0$, denn eine Koordinatenabbildung ϕ_0 kann als Verkettung einer Liftung an p und der globalen Karte Φ konstruiert werden, und jede andere Kartenabbildung ist (bis auf Einschränkung auf eine eventuell kleinere Umgebung von z) von der Gestalt $\phi_0 \circ h(\alpha)$ wobei $h(\alpha) \in \tilde{h}(M) \subset \mathbb{C}^*$ den Punkt 0 als Fixpunkt hat. Da nach Konstruktion $z_k \rightarrow z$ in M gilt, muß $\phi(z_k) \rightarrow 0$ in $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ konvergieren. Damit kann $(\phi(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{C}^*, \rho_0)$ nicht konvergieren, denn jeder von 0 verschiedene Grenzwert würde nach den Überlegungen zum 1. Fall der Eindeutigkeit der Konvergenz in $\mathbb{C}$ widersprechen. Da nach 4.6(ii) $(\mathbb{C}^*, \rho_0)$ aber metrisch vollständig ist, kann $(\phi(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ in $(\mathbb{C}^*, \rho_0)$ nicht einmal mehr eine Cauchyfolge sein. Sei V im Sinne der üblichen euklidischen Absolutbetrags $(|\cdot|)$ eine beliebig kleine Umgebung um den Nullpunkt in $\mathbb{C}$. Da die ℓ_0 -Weglänge jedes zu 0 konzentrischen Kreises $= 2\pi$ ist und ja der jeder Radius bezüglich der ℓ_0 -Weglänge als unendlich langer Weg gilt, kann zu V eine innere Kreisscheibe V' konstruiert werden, sodaß je zwei für die Messung von $\rho_0(z, y)$ für $z, y \in V'$ relevante Wege innerhalb von V verlaufen. Von daher folgt mit analogen Argumenten wie beim Beweis von C.1.5(ii), daß eine Einschränkung von ϕ auf eine hinreichend kleine Umgebung von z eine Isometrie ist. Dies schließt aber aus, daß $(z_k)_{k \in M}$ in M' eine Cauchy-Folge gewesen sein könnte. $\square$

4.8 Beweis von 4.1:

Nach 3.4/3.5 kann M als echter Ähnlichkeitstorus aufgefaßt werden und 0 somit als Streckzentrum der Holonomie im Sinne von 3.3. Sei $p: \widetilde{M} \rightarrow M$ die universelle Überlagerung gemäß A.2.17(ii). Angenommen, $0 \in \text{Bild}(\Phi)$. Wie in 4.7 konstruieren wir $\widetilde{M}' := M - p(\Phi^{-1}\{0\})$. Sei $E_1 := \widetilde{M} - (\Phi^{-1}\{0\})$. Damit sind die Inklusionen $i: M' \rightarrow M$, $\tilde{i}: E_1 \rightarrow \widetilde{M}$ sowie die durch Einschränkung definierten Abbildungen $p|_{E_1} := q_1: E_1 \rightarrow M'$ und $\Phi|_{E_1} := \Phi_1: E_1 \rightarrow \mathbb{C}^*$ strukturerhaltend. Sei $q: E_2 \rightarrow M'$ die universelle Überlagerung von M' . Da auch $q_1: E_1 \rightarrow M'$ eine Überlagerung von M' ist, existiert eine Überlagerungsprojektion $q_2: E_2 \rightarrow E_1$, sodaß $q_2 \circ q_1 = q$ ist. q_2 ist



strukturertreu nach A.1.8(iv). Durch $\Phi_2 := \Phi_1 \circ q_2$ ist dann also eine strukturertreuende Abbildung $E_2 \rightarrow \mathbf{C}^*$ gegeben. Da $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbf{C}^*, \mathbf{C}^*))$ gemäß 4.7(ii), d.h. $\mathbf{C}^*$ Grundmannigfaltigkeit für die Struktur von M' ist, kann nach C.2.1(i) Φ_2 als globale Karte von M' aufgefaßt werden. Nun ist M' nach 4.7(iii) WST-vollständig und folglich Φ_2 eine Überlagerung. In dem kommutativen Diagramm $\Phi_2 = \Phi_1 \circ q_2$ sind damit zwei der drei Abbildungen Überlagerungen; daß auch $\Phi_1 : E_1 \rightarrow \mathbf{C}^*$ eine Überlagerung ist, folgt mit dem nachfolgend zu beweisenden Hilfslemma 4.9. Entsprechend der Überlagerungstheorie (vgl. [StZ].6.3.1) müßte also $\pi_1(E_1)$ eine Untergruppe von $\pi_1(\mathbf{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ sein. Doch das ist unmöglich: $E_1 = (\tilde{M} - \Phi^{-1}\{0\})$ ist gemäß 4.7(i) eine unendlich häufig gelochte Ebene, sodaß $\pi_1(E_1)$ die freie Gruppe mit unendlich vielen Erzeugenden und somit insbesondere nicht abelsch ist. Von daher ist die zu Beginn dieses Beweises gesetzte Annahme falsch und 4.1 daher modulo dem nachfolgenden Hilfslemma bewiesen. $\square$

4.9 Hilfslemma aus der Topologie.

Seien M_1, M_2 und X Mannigfaltigkeiten und die Abbildungen

$p : M_1 \rightarrow X$, $p_2 : M_2 \rightarrow X$ und $p_1 : M_1 \rightarrow M_2$ seien lokale Homöomorphismen, p_1 und p sogar Überlagerungen. Es gelte $p_2 \circ p_1 = p$. Dann ist auch p_2 eine Überlagerung.

Beweis: Es ist zu zeigen, daß jedes $P \in X$ durch p_2 regulär überlagert wird, d.h. daß $p_2^{-1}(U)$ für jede genügend kleine offene Umgebung U von x eine disjunkte Vereinigung zu U homöomorpher Exemplare ist. Wir wählen U so klein, daß es durch p regulär überlagert wird. Es entsteht also eine diskrete Menge $\{P_j \mid j \in J\} = p^{-1}(\{P\})$, und als vollständiges Urbild erhält man $p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} U_j$, wobei $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist und die Indizierung so gewählt sei, daß $P_j \in U_j$ gilt. Durch Diagrammjagd in der dem kommutativen Diagramm $p = p_2 \circ p_1$ ist ergibt sich dann, daß $p_1(U_{j_1}) = p_1(U_{j_2})$ gilt, falls $p_1(P_{j_1}) = p_1(P_{j_2})$ ist, und daß $p_1(P_{j_1}) \cap p_1(P_{j_2}) = \emptyset$, falls $p_1(P_{j_1}) \neq p_1(P_{j_2})$ ist, ($j_1, j_2 \in J$). Dies beweist uns, daß $p_2^{-1}(U) = p_1(p^{-1}(U))$ eine disjunkte Vereinigung homöomorpher Exemplare ist, d.h. daß U auch durch p_2 regulär überlagert wird. $\square$

§5: Zusammenfassung der Klassifikation

5.1 Klassifikationsschema der echten Ähnlichkeitstori:

Es besteht folgendes Diagramm von bijektiven Abbildungen:

$$\begin{array}{ccccc}
 \overline{\text{WST}}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}) & \xleftrightarrow{(1)} & \overline{\text{WST}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}) & & \\
 & \xleftrightarrow{(2)} & \overline{\text{WST}}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*) & \xleftrightarrow{(3)} & \overline{\text{WST}}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*) \\
 & \xleftrightarrow{(4)} & \overline{\text{WST}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) & \xleftrightarrow{(5)} & \{ \text{Gitter} \mid \text{Definition wie in B.1.20} \}
 \end{array}$$

Die in diesem Diagramm eingesetzten Abbildungen entstehen wie folgt:

- (1) Die Abbildung " $\xleftrightarrow{(1)}$ " ist $\Gamma_{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})}$, definiert nach 1.7(v) und bijektiv nach Lemma 3.4/3.5.
- (2) Die Abbildung " $\xleftrightarrow{(2)}$ " ist $\Gamma_{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})}^{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)}$, definiert nach 1.7(iv) und bijektiv nach 4.1/4.2.
- (3) Die Abbildung " $\xleftrightarrow{(3)}$ " ist $\Gamma_{(\mathbb{C}^*, \mathbb{C})}^{(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)}$, ist definiert nach 1.7(iii) und bijektiv nach 3.1/3.2.
- (4) Die Abbildung " $\xleftrightarrow{(4)}$ " ist $\overline{\Gamma}_{\text{Log}}$ und " $\xleftrightarrow{(4)}$ " ist $\overline{\Gamma}_{\text{Exp}}$, definiert und bijektiv nach 1.7(ii).
- (5) Die Abbildung " $\xleftrightarrow{(5)}$ " ist der Übergang zu den Holonomiegruppen, bijektiv nach 2.1. □

5.2 Dritter Klassifikationssatz:

Sei M ein geschlossenes Objekt von $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Dann ist M strukturgleich zu einem der in A.2.4/A.2.15 definierten "Ähnlichkeitstori" in Standarddarstellung.

Beweis: Nach A.4.1 ist M ein Torus und nach 1.10 hat M entweder echte oder euklidische Ähnlichkeitsstruktur. Der Teil dieses Klassifikationssatzes, der sich auf die Tori mit euklidischer Ähnlichkeitsstruktur bezieht, wurde bereits 2.8 gezeigt. Ist M ein Torus mit echter Ähnlichkeitsstruktur, so können wir M durch das Klassifikationsschema 5.1 ein Gitter H in $\mathbb{C}$ zuordnen. Jenes Klassifikationsschema ordnet dasselbe Gitter H jedoch auch dem in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstorus $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^*/\text{Exp}(H))$ zu. Zu jenem Standardtorus ist M nach 5.1 also strukturgleich. □

5.3 Korollar: Die in Abschnitt B für die in Standarddarstellung gegebenen Ähnlichkeitstori abgeleiteten Aussagen A.2.17(v)/B.1.21/B.1.24/B.2.4/B.3.15/B.3.16/B.3.18/B.3.19/B.3.22/B.3.24/B.4.1/B.4.2/B.4.3/B.4.4/B.4.5/B.4.6/B.5.7 gelten für alle geschlossenen Flächen mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur.

Das Klassifikationsschema 5.1 durchläuft auch $\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ und $\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$. Von daher liefert es uns auch eine Klassifikation der geschlossenen Mannigfaltigkeiten jener Kategorien. Wir nutzen die Gelegenheit, die wichtigsten Aussagen über die geschlossenen $(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ - und $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Mannigfaltigkeiten festzuhalten.

5.4 Lemma: Die geschlossenen Objekte aus $\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ und $\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ sind WST -vollständig, letztere werden sogar durch ihre Holonomie klassifiziert.

Beweis: Sei $M \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*))$ bzw. $\in \text{obj}(\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*))$. Wir betrachten dann $M' \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C}))$, sodaß die in 5.1 benutzten Kategorietransformationen $\bar{M}'$ auf M

abbilden. Sei Φ' die globale Karte von M' . Da $\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ das Kriterium C.3.1 erfüllt, ist Φ' eine Überlagerung. Nach Definition der bei 5.1 benutzten Kategorietransformationen und 1.9 ergibt sich somit als globale Karte von M (falls $M \in \text{obj}(\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*))$ ist) $\text{Exp} \circ \Phi'$, bzw. (falls $M \in \text{obj}(\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*))$ ist) $\text{Cpl} \circ \text{Exp} \circ \Phi' = \text{exp} \circ \Phi'$. Da Exp ein Homöomorphismus ist und exp eine Überlagerungsabbildung (beachte, daß wir hier $\mathbb{C}^*$ als Wertebereich einsetzen müssen), folgt so die WST -Vollständigkeit von M in beiden Fällen. Im Fall $M \in \text{obj}(\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*))$ ergibt sich nach 1.8 und 1.4(ii), daß $\text{Exp}(\hbar(M'))$ die Holonomiegruppe von M ist. Da Exp nach A.2.8(iv)/A.2.10 ein Lie-Gruppen-Isomorphismus ist, überträgt sich so die Klassifikation der $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -Tori durch die Holonomiegruppen auf die Klassifikation der $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Tori. $\square$

5.5 Lemma: *Die Holonomiegruppen der geschlossenen Objekte aus $\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ sind genau die von zwei $\tilde{\mathbb{C}}^*$ -Elementen, die nicht reelle Potenz voneinander sind, erzeugten Gruppen. Diese Gruppen klassifizieren die geschlossenen Objekte.*

Beweis: Das bereits in 5.4 benutzte Klassifikationsschema 5.1 überträgt nach 1.8 die Holonomiegruppen der $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Tori auf die der $(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ -Tori. Mit der nunmehr abgeleiteten Klassifikation von $\text{WST}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ in 2.1 treten aber bei der Übersetzung der Gitter durch die Lie-Gruppen-Isomorphismen Exp und Log keine Phänomene auf, die uns nicht bereits bei der Definition der in Standarddarstellung gegebenen $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Tori in A.2.14 begegnet wären. $\square$

5.6 Lemma: *Jede geschlossene Mannigfaltigkeit aus $\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ ist strukturgleich zu einem Orbitraum, wie er als Standarddarstellung der $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Tori in A.2.14 definiert wurde.*

Beweis: $\tilde{\mathbb{C}}^*$ ist einfach zusammenhängend, sodaß die Holonomie der von $\tilde{\mathbb{C}}^*$ gebildeten Orbiträume nach B.1.19(ii) durch die Gruppe gegeben ist, deren Orbit betrachtet wird. Damit ergeben die Aussagen 5.4/5.5, daß die in A.2.14 gegebene Standarddarstellung bereits alle Strukturklassen erfaßt. $\square$

5.7 Bemerkung: *Die geschlossenen Mannigfaltigkeiten aus $\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ können nicht durch ihre Holonomie klassifiziert werden, denn die in B.1.22 genannten Beispiele in Standarddarstellung gegebener echter Ähnlichkeitstori können durch andere Maximalisierung ihrer Atlanten auch in Beispiele für die Kategorie $\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ verwandelt werden. Sie sind dann auch für $\text{WST}(\mathbb{C}^*, \mathbb{C}^*)$ Beispiele nicht durch ihre Holonomie unterscheidbarer nicht-strukturgleicher Tori.*

§6: Die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomie

6.1 Zielbestimmung: In diesem Paragraphen gilt es, eine algebraische Strukturinvariante zu definieren, die alle Ähnlichkeitstori unterscheiden soll. Diese Strukturinvariante soll für echte und euklidische Ähnlichkeitstori nach demselben Konzept definiert werden.

Die Idee dabei ist, die in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ erklärten Holonomiegruppen in die universelle Überlagerung von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ zu liften, wobei uns die Betrachtung der absoluten Umlaufwinkel in §B.3 die für die Liftung der einzelnen Holonomiegruppen benötigten Informationen liefert. Wir erinnern daran, daß der übliche in §B.1 eingeführte Holonomiebegriff nach B.1.22 nicht ausreicht, alle Ähnlichkeitstori zu unterscheiden.

6.2 Definition: Die entsprechend der Lie-Gruppen-Theorie zu bildende universelle Überlagerung von $\text{Aut}(\mathbb{C})$ wird in dieser Arbeit mit “ $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ ” bezeichnet und die zugehörige Überlagerungsprojektion mit “ $\widetilde{\text{Cpl}} : \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ ”. Wir beschreiben diese Lie-Gruppe durch folgende Koordinaten:

$$(1) \quad \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}) := \{(a, \alpha, b) \mid a \in \mathbb{C}^*, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}, b \in \mathbb{C}\}.$$

Die Gruppenverknüpfung hat dann folgende Form:

$$(2) \quad (a_1, \alpha_1, b_1) \cdot (a_2, \alpha_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, \alpha_1 + \alpha_2, b_1 \cdot a_2 + b_2).$$

Die kanonischen Projektionen, die $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ zuläßt, lassen sich in diesen Koordinaten wie folgt ausdrücken:

$$(i) \quad \widetilde{\text{Cpl}} : \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}), \quad (a, \alpha, b) \longmapsto (z \mapsto a \cdot z + b)$$

$$(ii) \quad \widetilde{\text{Dr}} : \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}) \longrightarrow \widetilde{\mathbb{C}}^*, \quad (a, \alpha, b) \longmapsto (a, \alpha) \quad \text{“Drehanteil”}$$

Analog wie Dr (vgl. B.1.17) ist $\widetilde{\text{Dr}}(\varphi)$ eine Konjugationsinvariante jedes Elementes $\varphi \in \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$.

6.3 Bemerkung: Die algebraische Struktur der Gruppen $\widetilde{\mathbb{C}}^*$, $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ und $\text{Aut}(\mathbb{C})$ wird durch die nachstehend genannten Beziehungen gegeben, die durch die jeweils unter Buchstabe (b) mit aufgeführten Lie-Gruppen-Isomorphismen realisiert werden können:

$$(1a) \quad \widetilde{\mathbb{C}}^* \cong (\mathbb{R}^2, +)$$

$$(1b) \quad S \longmapsto (\Re(\text{Log}(S)), \Im(\text{Log}(S)))$$

$$(2a) \quad \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}) \cong (\mathbb{R}^2, +) \ltimes (\mathbb{R}^2, +)$$

$$(2b) \quad (a, \alpha, b) \longmapsto ((\Re(\text{Log}(a, \alpha)), \Im(\text{Log}(a, \alpha))), (\Re(b), \Im(b)))$$

$$(3a) \quad \text{Aut}(\mathbb{C}) \cong (S^1 \times (\mathbb{R}, +)) \ltimes (\mathbb{R}^2, +)$$

$$(3b) \quad (z \mapsto a \cdot z + b) \longmapsto ((\arg(a), \ln(|a|)), (\Re(b), \Im(b)))$$

6.4 Definition der $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ -Holonomie:

Sei M ein Ähnlichkeitstorus und $\hbar : \pi_1(M) \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C})$ eine Holonomieabbildung dazu. Als “ $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ -Holonomie von M ” bezeichnen wir jeden Homomorphismus $\tilde{\hbar} : \pi_1(M) \rightarrow \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$, der als Liftung einer Holonomieabbildung $\hbar$ wie folgt definiert wird:

$$\text{Gilt } \hbar(\alpha) = (z \mapsto a \cdot z + b), \text{ so sei } \tilde{\hbar}(\alpha) := (a, \otimes_{\text{abs}}(\alpha), b) \in \widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C}).$$

Analog zu B.1.14 bezeichnen wir $\text{Bild}(\tilde{\hbar})$ als “ $\widetilde{\text{Aut}}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppe”.

Wohldefiniertheitsbeweis: Man benutzt B.3.21(ii), um zu zeigen, daß $\tilde{\hbar}$ wohldefiniert ist, und B.1.11/B.3.19/6.2(2), um zu zeigen, daß es ein Homomorphismus ist. $\square$

Als Folge von 6.4/5.6/B.3.22(iii) ergeben sich folgende Beziehungen der $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomie $\tilde{h}$ eines Ähnlichkeitstorus M zu anderen Holonomien (Definitionen siehe 6.2):

6.5 Korollar:

- (i) $\widetilde{\text{Cpl}} \circ \tilde{h}$ ist eine Holonomieabbildung von M im Sinne von B.1.10(ii).
- (ii) Ist $M \in \text{obj}(\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}))$, so ist $\widetilde{\text{Dr}} \circ \tilde{h}$ ist die Holonomie eines $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Torus M' , sodaß $\Gamma_{\text{Cpl}}(M')$ in $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ strukturgleich zu M ist. Für $M \in \text{obj}(\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}))$ besteht $\text{Bild}(\widetilde{\text{Dr}} \circ \tilde{h})$ nur aus dem neutralen Element (vgl. B.4.3/5.3).

Aus 6.4/2.5/A.2.4/2.7 entsteht folgender

6.6 Satz über die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen der euklidischen Ähnlichkeitstori:

Als solche treten genau die von zwei Elementen des Typs $(1, 0, b_1), (1, 0, b_2) \in \text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ erzeugten Gruppen auf, wobei $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ reell linear unabhängig sind. Insbesondere gilt also, daß in keiner $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppe eines euklidischen Ähnlichkeitstorus ein von 0 verschiedener $\widetilde{\text{Dr}}$ -Drehanteil vorkommt.

6.7 Satz über die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen der echten Ähnlichkeitstori:

Als solche treten genau die von zwei Elementen $(a_1, \alpha_1, b_1), (a_1, \alpha_2, b_2) \in \text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ erzeugten Gruppen auf, für die gilt:

- (i) Die $\tilde{\mathbb{C}}^*$ -Werte (a_1, α_1) und (a_2, α_2) sind nicht reelle Potenz voneinander.
- (ii) Sofern keiner beiden Quotienten $\frac{b_1}{1-\alpha_1}$ und $\frac{b_2}{1-\alpha_2}$ ein Quotient vom Typ $\frac{0}{0}$ ist, stimmen sie überein.

Beweis: Die Holonomiegruppen der echten Ähnlichkeitstori sind ja durch die Projektionen $\widetilde{\text{Dr}}$ und $\widetilde{\text{Cpl}}$ vollständig determiniert, sodaß ihre Vielfalt durch die Aussagen 6.4/B.1.24/5.3 und 5.5 begrenzt ist. Der Fall der Quotienten $\frac{0}{0}$ tritt automatisch dann auf, wenn der Fall vorliegt, daß die Holonomie nur ein Erzeugendes hat (vgl. B.1.24(ii)/B.1.25(i)). Da dann ja die Bedingung an die Holonomiegruppen unseres Ähnlichkeitstorus, nur Drehstreckungen oder Drehungen mit demselben Fixpunkt zu enthalten, automatisch erfüllt ist, wird in dem Fall die Bedingung (ii) leer.

Umgekehrt kann man das Auftreten der in diesem Lemma als Holonomiegruppen beschriebenen Gruppen dadurch zeigen, indem man zunächst $H := \langle (a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2) \rangle \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$ definiert, sowie $M' := \tilde{\mathbb{C}}^*/H \in \text{obj}(\text{WST}(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*))$. Sei Φ' eine globale Karte von M' . Zu der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Mannigfaltigkeit $\Gamma_{\text{Cpl}}(M')$ konstruiert man dann die globale Karte

$$\Phi := \tau_{b_1/(1-\alpha_1)} \circ \text{Cpl} \circ \Phi'$$

und erhält die gesuchte Holonomie dann als die zu dieser globalen Karte im Sinne von C.2.3 verträgliche Holonomie. $\tau_{b_1/(1-\alpha_1)}$ war dabei die Translation $z \mapsto z + \frac{b_1}{(1-\alpha_1)}$. Sollte $\frac{b_1}{1-\alpha_1}$ ein Quotient vom Typ $\frac{0}{0}$ gewesen sein, benutzen wir stattdessen $\frac{b_2}{1-\alpha_2}$. Beide können nicht von jenem Typ sein, da dann die Erzeugenden unserer $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomie $(1, \alpha_1, 0)$ und $(1, \alpha_2, 0)$ die Eigenschaft (i) verletzen würden. $\square$

6.8 Korollar: In der $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppe eines echten Ähnlichkeitstorus gibt es stets Elemente α_1, α_2 mit $\text{Arg}(\widetilde{\text{Dr}}(\alpha_1)) \neq 0$ und $|\widetilde{\text{Dr}}(\alpha_2)| \neq 1$, denn 6.7(i) wäre verletzt, wäre dem nicht so.

Wir erinnern daran, daß laut B.1.25(i) die Holonomieabbildung $\tilde{h}$ einer Ähnlichkeitsmannigfaltigkeit nicht notwendigerweise injektiv ist. Dagegen können wir jetzt zeigen:

6.9 Satz: Sei M ein Ähnlichkeitstorus und $\tilde{h}$ eine $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomieabbildung. Dann ist $\tilde{h}$ injektiv.

Beweis: Ist M ein euklidischer Ähnlichkeitstorus, so ist $\widetilde{\text{Cpl}}(\tilde{h}(\pi_1(M)))$ nach 6.6/2.5 ein Gitter gemäß B.1.20. Ist $M \in \text{obj}(\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}))$, so ist $\text{Log}(\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))))$ nach 6.7/5.1/1.8 die Holonomiegruppe eines Translationstorus und damit ein Gitter. Da also in jedem Fall ein homomorphes Bild von $\tilde{h}(\pi_1(M))$ noch isomorph zu $\pi_1(M)$ ist, muß $\tilde{h}$ injektiv sein. $\square$

6.10 Satz: Die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen sind bis auf Konjugation eindeutig bestimmte Strukturinvarianten der Ähnlichkeitstori.

Beweis: Nach 6.4 sind die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen durch die Holonomiegruppen und den absoluten Umlaufwinkel eindeutig bestimmt. Letzterer ist nach B.3.18 eindeutig definiert und ersterer eindeutig bis auf Konjugation gemäß B.1.16.

6.11 Satz: Die Ähnlichkeitstori werden durch die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomie klassifiziert, d.h. jeder Strukturklasse aus $\widetilde{\text{WST}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ entspricht eineindeutig eine Konjugationsklasse der in 6.6 oder 6.7 beschriebenen Untergruppen von $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$.

Beweis: Nach 6.8/6.10 sind die Holonomiegruppen der euklidischen Ähnlichkeitstori von denen der echten Ähnlichkeitstori durch die Konjugationsinvarianten $\widetilde{\text{Dr}}(\dots)$ zu unterscheiden (vgl. 6.2(ii)). Daß sowohl die echten Ähnlichkeitstori einerseits als auch die euklidischen andererseits durch die $\text{Aut}^{\sim}(\mathbb{C})$ -Holonomiegruppen klassifiziert werden, folgt aus den im Zuge des Beweises 6.9 konstruierten homomorphen Bildern zusammen mit den Klassifikationsaussagen 5.2/2.7/B.3.23. $\square$

Abschnitt E : Beziehung zwischen den Ähnlichkeitstori und den riemannschen Flächen

Ziel dieses Abschnitts (siehe §3) ist es, zu einer Aufzählung aller Klassen strukturgleicher geschlossener Flächen mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur durch eine Menge geeignet gewählter Zahlenpaare zu kommen. Zuvor gilt es noch, einen in den bisherigen Untersuchungen noch nicht erwähnten Aspekt abzuhandeln:

Da $\text{ST}(C^\omega, \mathbb{C})$ eine restriktivere Kategorie ist als $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$, läßt sich den Objekten unserer Untersuchung auch jeweils eine $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Struktur, d.h. die Struktur einer riemannschen Fläche zuordnen, was uns eine gröbere Klassifikation dieser Objekte liefert. Diese Klassifikation ist als Klassifikation der Tori nach konformer Äquivalenz aus der Theorie der riemannschen Flächen im Prinzip bereits bekannt. Da jedoch die Standardwerke der Funktionentheorie und der Theorie der riemannschen Flächen die hier relevanten Zusammenhänge im Normalfall nicht von der Position aus beleuchten, die für uns von Wichtigkeit ist, geben wir zu Beginn des ersten Paragraphen dieses Abschnitts eine Skizze der Klassifikation der Tori aus $\text{ST}(C^\omega, \mathbb{C})$ an. Es stellt sich heraus, daß jeder $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Torus strukturgleich zu einem Orbitraum ist, wie er nach A.2.4 die Standarddarstellung der euklidischen Ähnlichkeitstori beschreibt, und daß auch die Klassifikation der so in Standarddarstellung gegebenen $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Tori dieselbe ist wie bei den euklidischen Ähnlichkeitstori in B.1.21. Der Unterschied zwischen diesen beiden Typen von Mannigfaltigkeiten besteht also im wesentlichen nur darin, wie die nach A.2.3(1) konstruierten Atlanten gemäß A.1.9/A.1.7 zu maximalisieren sind.

Es stellt sich damit die Frage, durch welche der Standarddarstellungen A.2.4 diejenige Struktur einer riemannschen Fläche gegeben ist, die auf einem echten Ähnlichkeitstorus definiert ist. In §1 werden diese Fragen untersucht und, da wir ja nach A.1.11 in dieser Arbeit keine Objekte betrachten können, auf denen Strukturen verschiedenen Typs gegeben sind, zumeist als Eigenschaften der Kategorietransformation $\Gamma_{(C^\omega, \mathbb{C})}^{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}$ (Definition siehe D.1.7(viii)) formuliert. In §2 machen wir uns dann die Verwandtschaft zwischen den euklidischen Ähnlichkeitstori und den $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Tori zunutze, um einige Aussagen über euklidische Ähnlichkeitstori durch Berufung auf die bekannten Ergebnisse der Theorie der riemannschen Flächen schnell abzuleiten. Bei der in §3 genannten Liste der $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Strukturen berücksichtigen wir die Ergebnisse der Klassifikation der riemannschen Flächen insofern, als daß wir die erste Komponente der dort genannten Zahlenpaare als Torusmodul wählen, d.h. als der eine Zahlen, durch die die verschiedenen Strukturen gegeben sind, die einem Torus als riemannsche Fläche zukommen können.

§1: Untersuchung der Kategorietransformation

$$\Gamma : \text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C}) \rightarrow \text{ST}(C^\omega, \mathbb{C}):$$

1.1 Beweisskizze der Klassifikation der riemannschen Flächen, die Tori sind, nach konformer Äquivalenz

Um die Tori mit $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Struktur zu klassifizieren, konstruiert man zunächst im Sinne von A.2.17(ii) die universellen Überlagerungen. Dies ist bei jedem Torus M ein einfach zusammenhängender Raum $\widetilde{M}$ mit $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Struktur, auf dem die Deckbewegungsgruppe (in unserem Fall also eine ablesche Gruppe biholomorpher Abbildungen mit zwei Erzeugenden) operiert. Nach dem verallgemeinerten Riemannschen Abbildungssatz ([Beso].V.5.α.Satz 27) ist $\widetilde{M}$ aber entweder konform äquivalent zu $\widehat{\mathbb{C}}$, oder zur Einheitskreisscheibe D oder zu $\mathbb{C}$. Die ersten beiden Möglichkeiten scheiden aus: Da die Abbildungen, die auf der Einheitskreisscheibe biholomorph operieren, ein Modell für die Bewegungen der hyperbolischen Geometrie sind, bilden sie keine Untergruppe, die frei abelsch ist, zwei Erzeugende hat und eigentlich diskontinuierlich und frei operiert. Da die Deckbewegungsgruppe eines Torus jedoch eine solche Untergruppe sein müßte, kann D (als riemannsche Fläche) nicht die universelle Überlagerung eines Torus sein. $\widehat{\mathbb{C}}$ scheidet ebenfalls aus, denn die universelle Überlagerung des Torus ist nicht homöomorph zur Zwei-Sphäre $\widehat{\mathbb{C}}$. Von daher ist in jedem Fall $\mathbb{C}$ mit der universellen Überlagerung $\widetilde{M}$ zu identifizieren. Die biholomorphen Abbildungen von $\mathbb{C}$ in sich sind andererseits genau die Ähnlichkeitsabbildungen, die wir in A.2.2(1) in der Gruppe "Aut($\mathbb{C}$)" zusammengefaßt haben ([FL].IX.3.2). Wie wir bereits im Zuge dieser Arbeit (D.2.5) gesehen haben, sind die einzigen Untergruppen von Aut($\mathbb{C}$), die sich wie die Deckbewegungsgruppe eines Torus verhalten, die Gitter. Also ist jeder $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Torus strukturgleich zu einem Raum $(\mathbb{C}/H, \widetilde{\mathcal{A}}_H^{C^\omega})$, wobei H ein Gitter gemäß B.1.20 ist. Der Unterschied zu den euklidischen Ähnlichkeitstori in Standarddarstellung liegt also nur in der Maximalisierung des Atlas. Da die Gruppe der auf $\mathbb{C}$ operierenden biholomorphen Abbildungen gerade Aut($\mathbb{C}$) ist, fällt die Klassifikation der $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Tori nicht anders aus, als die in B.1.21 beschriebene Klassifikation der euklidischen Ähnlichkeitstori. (Genaueres siehe [Zie].21.13(b).)

1.2 Bemerkung zur Geometrie auf den riemannschen Flächen, die Tori sind:
Man mache sich bewußt, daß in der Theorie der riemannschen Flächen den Objekten aus $ST(C^\omega, \mathbb{C})$ auf andere Art eine Geometrie zugeordnet wird, als im Zuge der in dieser Arbeit dargelegten Theorie durch die Definitionen A.3.2/A.3.4 geschieht. Würden wir nämlich diese Definition direkt auf $ST(C^\omega, \mathbb{C})$ anwenden, so erhielten wir eine Geometrie, deren einzige zulässige Begriffe das beschreiben, was invariant unter allen (u.U. nur in Umgebung erklärten) biholomorphen Abbildungen ist. Dies wären, (vgl. A.3.5) neben den Begriffen aus der Differentialgeometrie im wesentlichen nur der Begriff des Winkels. Da die so entstehende Geometrie als zu wenig reichhaltig empfunden würde, geht man in der Theorie der riemannschen Flächen einen anderen Weg: Man wendet die Prinzipien A.3.2/A.3.4 eben nicht auf jeden Atlas an, sondern nur auf einen Teilatlas, den man wie folgt auswählt:

Man konstruiert zu $M \in ST(C^\omega, \mathbb{C})$ Atlanten $p(\mathcal{A}_\Phi)$ wie in C.2.4(1), wobei anstelle der globalen Karte Φ in dem Zusammenhang eine jener biholomorphen Abbildungen tritt, durch die, (wie wir bereits in 1.1 erwähnt haben) $\widetilde{M}$ auf eines der Gebiete $\mathbb{C}$, $\widehat{\mathbb{C}}$ oder D abgebildet wird. Da diese Räume zugleich Modelle für die euklidische, die elliptische und die hyperbolische Geometrie bilden und die Gruppen der biholomorphen Abbildungen, die invariant gegenüber einem dieser Räume operieren, zugleich geometrieverträglich sind, kommt man durch Anwendung der Prinzipien A.3.2/A.3.4 nur auf

diese Teilatlanten unserer maximalen Atlanten zu reichhaltigeren Geometrien für alle riemannschen Flächen. In dem uns interessierenden Fall kommt man so immer zu euklidischen Ähnlichkeitsgeometrien: Zum einen ist die Gruppe der biholomorph gegenüber $\mathbb{C}$ operierenden Abbildungen genau die von uns betrachtete Gruppe $\text{Aut}(\mathbb{C})$, zum anderen entstehen bei den Atlanten $p(\mathcal{A}_\Phi)$ als Übersetzungsabbildungen ja nur Abbildungen der durch die biholomorphe Abbildung Φ von $\widetilde{M}$ nach $\mathbb{C}$ übertragenen Deckbewegungsgruppe. Da diese fixpunktfrei sind, können es keine Abbildungen mit Streckfaktor sein. Wir erkennen so auch, daß die drei Aussagen:

- ▷ “Jeder Ähnlichkeitstorus ist auch eine riemannsche Fläche (denn jeder $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Atlas ist insbesondere ein $(\mathbb{C}^\omega, \mathbb{C})$ -Atlas”,
- ▷ “Jede riemannsche Fläche, die ein Torus ist, hat eine euklidische Ähnlichkeitsgeometrie” (nach 1.2/1.1),
- ▷ “Es gibt Tori mit echter Ähnlichkeitsgeometrie (siehe A.2.7/A.3.8)”

kein Widerspruch zueinander sind, sondern nur die Folge der unterschiedlichen Definitionen der Geometrie in der hier dargelegten Theorie und in der Theorie der riemannschen Flächen: Ist $(M, \mathcal{A})$ ein echter Ähnlichkeitstorus, so wird ja beim Übergang von M zu der durch M beschriebenen riemannschen Fläche (d.h. zu $\Gamma_{(\mathbb{C}^\omega, \mathbb{C})}^{\text{Aut}(\mathbb{C}, \mathbb{C})}(M) =: \Gamma(M)$) gemäß D.1.3(iii)(1.) der maximale $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Atlas $\mathcal{A}$ zunächst zu einem maximalen $(\mathbb{C}^\omega, \mathbb{C})$ -Atlas $\Gamma(\mathcal{A})$ erweitert. Während $\mathcal{A}$ jedoch die Ähnlichkeitsgeometrie von M induziert (wie eben dargelegt), definiert nur ein Teilatlas von $\Gamma(\mathcal{A})$ die Geometrie der riemannschen Fläche $\Gamma(M)$. Und bei den echten Ähnlichkeitstori ist dieser Teil grundsätzlich disjunkt von $\mathcal{A}$.

1.3 Definition und Lemma:

(i) Als “Torusmodul” bezeichnen wir eine komplexe Zahl $\mu \in \Omega$, wobei

$$\Omega := \left\{ \omega \in \mathbb{C} \mid -\frac{1}{2} < \Re(\omega) \leq +\frac{1}{2}, \Im(\omega) > 0, |\omega| > 1 \right\} \\ \cup \left\{ \omega \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \Re(\omega) \leq \frac{1}{2}, \Im(\omega) > 0, |\omega| = 1 \right\}.$$

(ii) Jedem Torusmodul μ läßt sich vermittelt $\mu \mapsto \langle 1, \mu \rangle$ das von 1 und μ erzeugte Gitter zuordnen, wobei diese Vorschrift bijektiv auf die Menge aller Konjugationsklassen von Gittern in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ abbildet.

(iii) Nach B.1.21 und 1.1 lassen sich somit die Strukturklassen der euklidischen Ähnlichkeitstori und der $(\mathbb{C}^\omega, \mathbb{C})$ -Tori durch die Torusmoduln aufzählen mittels der Bijektionen:

$$\Omega \rightarrow \overline{\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}, \quad \mu \mapsto (\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1, \mu)}^{\text{Aut}(\mathbb{C})}), \\ \Omega \rightarrow \overline{\text{ST}_{\text{Tori}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}, \quad \mu \mapsto (\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1, \mu)}^{\mathbb{C}^\omega}).$$

Beweisskizze von (ii): (siehe auch [Fricke].I.2.§2(Fig.43) / [Zie].§21)

Sei τ_a die Translation $z \mapsto z + a$, so ist für $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{C})$ die Abbildung $\varphi \circ \tau_a \circ \varphi^{-1} = \tau_{\varphi(\varphi^{-1}a)}$, d.h. die Translation um jene komplexe Zahl. Damit ist jedes Gitter konjugiert zu einem, dessen betragskleinster nicht-verschwindender Wert = 1 ist. Als zweites Erzeugendes kann dann auf jeden Fall der betragkleinste Wert in der oberen Halbebene

des so normierten Gitters H dienen. Ist die Länge des betragskleinsten und des betrags zweitkleinsten Erzeugenden gleich, so wählen wir dasjenige Erzeugende, das wir als "erstes" ansehen und durch Konjugation in 1 überführen, so, daß das zweite Erzeugende bei jener Konjugation in den ersten Quadranten fällt. Da schließlich mit $h \in H$ auch $h \pm 1 \in H$ gilt, liegt ein betragskleinster Wert stets in dem für Torusmoduln vorgesehenen Bereich Ω . Umgekehrt ergibt sich, daß der Quotient aus dem betragskleinsten Wert eines Gitters und dem nächstgrößeren dazu linear unabhängigen Wert eine Konjugationsinvariante des Gitters in $\text{Aut}(\mathbb{C})$ ist. Von daher sind für $\mu_1 \neq \mu_2$, $\mu_1, \mu_2 \in \Omega$ die Gruppen $\langle 1, \mu_1 \rangle$ und $\langle 1, \mu_2 \rangle$ nicht konjugiert zueinander. $\square$

1.4 Bemerkungen:

- (i) $\Gamma_{(C^\omega, \mathbb{C})}^{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}$ ist nicht surjektiv, denn laut [BeSo]. V.6.Satz 38/V.Anhang.Satz 40 gibt es die Strukturen riemannscher Flächen auch auf geschlossenen Flächen, die keine Tori sind.
- (ii) $\Gamma_{(C^\omega, \mathbb{C})}^{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}$ ist nicht injektiv, denn aus der Analogie der Klassifikation der euklidischen Ähnlichkeitstori und der $(C^\omega, \mathbb{C})$ -Tori (siehe 1.3(iii)), ergibt sich, daß $\Gamma_{\overline{\text{WST}_{\text{eukl}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}}^{\overline{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}}$ bijektiv sein muß. Demnach bildet dann $\Gamma_{\overline{\text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}}^{\overline{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}}$ nur auf solche Strukturklassen ab, die bereits ein anderes Urbild haben.

Ziel der folgenden Überlegungen ist es, zu jedem $M \in \text{ST}_{\text{Tori}}(C^\omega, \mathbb{C})$ das vollständige Urbild $\Gamma_{(C^\omega, \mathbb{C})}^{(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{-1} \{\overline{M}\}$ zu bestimmen, d.h. insbesondere bei jedem $M' \in \text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ aus diesem Urbild den Torusmodul μ , durch den nach 1.3(iii) die Struktur von M beschrieben wird, wiederzufinden.

1.5 Lemma: Sei M ein echter Ähnlichkeitstorus mit $\text{Aut} \sim (\mathbb{C})$ -Holonomie $\tilde{h}$. Dann gibt es ein $S \in \widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))) \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$, sodaß

$$(1) \quad P(M) := \{y \in \mathbb{C} \mid S^y \in \widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M)))\}$$

ein von 1 und einem Torusmodul μ erzeugtes Gitter ist. μ ist durch diese Bedingung eindeutig bestimmt.

Beweis: Mit Hilfe der in A.2.13 eingeführten $\tilde{\mathbb{C}}^*$ -Potenzen kann zu jedem $S \in \tilde{\mathbb{C}}^* - \{(1, 0)\}$ eine Gruppe $P_S(M)$ durch die Gleichung (1) definiert werden. Durch Umformung von (1) entsteht die Beziehung:

$$(2) \quad P_S(M) := \{y \in \mathbb{C} \mid y \cdot \text{Log}(S) \in \text{Log}(\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))))\}.$$

Nach D.6.5(ii) ist $\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M)))$ die Holonomiegruppe eines $(\tilde{\mathbb{C}}^*, \tilde{\mathbb{C}}^*)$ -Torus und erfüllt daher D.5.5. Die Menge $\text{Log}(\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))))$ ist nach D.5.1(4)/D.5.1(5)/D.1.8/D.1.4(ii)/D.2.1 als Holonomiegruppe eines Translationstorus dann ein Gitter in $\mathbb{C}$. Mit der Darstellung (2) erkennen wir, daß die Translationsgruppen

$$(3) \quad \{z \mapsto y + z \mid y \cdot \text{Log}(S) \in \text{Log}(\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))))\} \quad \text{und}$$

$$(4) \quad \{z \mapsto w + z \mid w \in \text{Log}(\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M))))\}$$

zueinander konjugierte Gitter sind.

Wenn dem Gitter $P_S(M)$ eine Darstellung $P_S(M) = \langle 1, \mu \rangle$ mit $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| \geq 1$ zukommen soll, so ist das dann und nur dann der Fall, wenn zuvor $S \in \widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M)))$ so gewählt wird, daß $|\text{Log}(S)| = \min\{|\text{Log}(T)| \mid T \in \widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(\pi_1(M)))\}$, $|\text{Log}(T)| \neq 0$ ist. Weil (2) ein diskretes Gitter beschreibt, existiert dieses Minimum. Andererseits kann mit dieser Wahl von S das zweite Erzeugende von $P_S(M)$ auf den für Torusmodul zulässigen Bereich normiert werden, eventuell (falls die betragskleinsten Erzeugenden von $P_S(M)$ den gleichen Betrag haben), nach Vertauschen der beiden Erzeugenden. Daß mit diesen Normierungsvorschriften das zweite Erzeugende μ eindeutig bestimmt ist, ist leicht zu sehen. (Vgl. die bei 1.3(ii) skizzierten Normierungen.) $\square$

1.6 Lemma: Sei M ein Ähnlichkeitstorus. Dann ist M strukturgleich zu einem der nachfolgend beschriebenen speziellen Standarddarstellungen, wobei die Zahl $\mu \in \Omega$ (vgl. 1.3(i)) jeweils eindeutig bestimmt ist:

- (i) $\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle$ (für $M \in \text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$)
- (ii) $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^* / \langle S, S^\mu \rangle)$ für $S \in \tilde{\mathbb{C}}^* - \{(1, 0)\}$ (falls $M \in \text{WST}_{\text{echt}}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$).

Beweis: Die allgemeinere Form der Standarddarstellungen A.2.4/A.2.15 ist nach D.5.2 stets möglich. Ist $M = \mathbb{C}/H$ ein euklidischer Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung, so kann nach B.1.21 das Gitter H durch ein konjugiertes ersetzt werden und nach 1.3(ii) gibt es genau ein Konjugat zu H der Form $\langle 1, \mu \rangle$. Falls M ein echter Ähnlichkeitstorus in Standarddarstellung ist, benutzen wir analog den zweiten Klassifikationssatz B.3.24 und die Erkenntnis, daß nach D.6.5(ii)/B.1.19(ii) die dabei auftretenden invarianten Gruppen $H \subset \tilde{\mathbb{C}}^*$ gerade durch $\widetilde{\text{Dr}}(\tilde{h}(M))$ gegeben sind. Nach 1.5 können diese Gruppen gerade in der hier gewünschten Form mit eindeutigem μ dargestellt werden. $\square$

1.7 Lemma: Sei M' ein euklidischer Ähnlichkeitstorus, dessen Struktur im Sinne von 1.6(i) durch den Torusmodul μ gegeben ist und M ein echter Ähnlichkeitstorus, dem gemäß 1.6(ii) auch der Torusmodul μ zugeordnet wird. Dann existiert ein strukturerhaltender Homöomorphismus zwischen $\Gamma(M)$ und $\Gamma(M')$, d.h. die beiden Tori sind als riemannsche Flächen konform äquivalent.

Beweis: Laut 1.6(i) ist M' strukturgleich zu seiner Standarddarstellung $\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle$, und M ist strukturgleich zu $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^* / \langle S, S^\mu \rangle)$ wegen 1.6(ii). Zwischen diesen Standarddarstellungen induziert die Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}^*$, $z \mapsto \text{Exp}(\text{Log}(S) \cdot z)$ einen $\text{ST}(C^\omega, \mathbb{C})$ -strukturerhaltenden Homöomorphismus.

1.8 Lemma: Sei $M := (\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1, \mu)}^{C^\omega})$. Dann enthalten die Strukturklassen der Ähnlichkeitstori, die in $\overline{\Gamma_{(C^\omega, \mathbb{C})}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})}^{-1}(\overline{M})$ liegen, einen euklidischen Ähnlichkeitstorus und eine zweiparametrische Schar echter Ähnlichkeitstori. Der euklidische Ähnlichkeitstorus ist in Standarddarstellung gegeben durch $(\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle, \widetilde{\mathcal{A}}_{(1, \mu)}^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$; die echten Ähnlichkeitstori können alle beschrieben werden durch $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{\mathbb{C}}^* / \langle S, S^\mu \rangle)$, wobei S den Bereich $\tilde{\mathbb{C}}^* - \{(1, 0)\}$ durchläuft. Dabei wird jede Strukturklasse höchstens endlich oft erfaßt. Wegen einer genauen Auflistung siehe §3.

Beweis: Aufgrund der Klassifikation der riemannschen Flächen, die Tori sind, nach konformer Äquivalenz in 1.1 und den in 1.7 beschriebenen konformen Äquivalenzen zwischen den Ähnlichkeitstori ergibt sich diese Beschreibung von $\overline{\Gamma_{(C^*, C)}^{(\text{Aut}(C), C)}^{-1}} \{ \overline{M} \}$. Gemäß der Klassifikation der echten Ähnlichkeitstori in D.5.3/B.3.24 können ja $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^* / \langle S_1, S_1^* \rangle)$ und $\Gamma_{\text{Cpl}}(\tilde{C}^* / \langle S_2, S_2^* \rangle)$ nur dann als Ähnlichkeitsmannigfaltigkeiten strukturgleich sein, wenn $\langle \text{Log}(S_1), \mu \cdot \text{Log}(S_1) \rangle$ und $\langle \text{Log}(S_2), \mu \cdot \text{Log}(S_2) \rangle$ übereinstimmen. Das kann aber nur der Fall sein, wenn der Quotient $\text{Log}(S_1)/\text{Log}(S_2)$ vom Betrage 1 ist und eine der endlich vielen Drehsymmetrien eines Gitters beschreibt (vgl. 2.0(4.)/2.0(6.)–2.0(7.)). $\square$

1.9 Korollar: Sei M ein echter Ähnlichkeitstorus. Dann stimmen die nachfolgend genannten drei Geometrien, die man M zuordnen kann, untereinander im wesentlichen überein (d.h. zwischen den entsprechenden Räumen lassen sich Geraden- Winkel- und Längenverhältnis-treue Homöomorphismen konstruieren), sind aber von der gemäß Prinzip A.3.2/A.3.4 induzierten Ähnlichkeitsgeometrie verschieden:

- (i) Die Geometrie derjenigen zweidimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit, die durch Ummetrisation der Grundmannigfaltigkeit C gemäß D.4.5–D.4.7 entsteht (die Definition D.4.7(ii) geht ja wegen D.4.8 in $M' = M$ über).
- (ii) Die Geometrie des einzigen euklidischen Ähnlichkeitstorus der in 1.8 beschriebenen Äquivalenzklasse, der auch M angehört.
- (iii) Die Geometrie, die $\Gamma_{(C^*, C)}^{(\text{Aut}(C), C)}(M)$, wie in 1.2 beschrieben, im Zuge der Theorie der riemannschen Flächen zugeordnet wird.

Beweis: Sei $\mathcal{A}$ der Ähnlichkeitsatlas von M . Da diese drei Geometrien metrisch oder metrisierbar sind, also frei von den nach B.4.4(ii) stets vorhandenen Vergrößerungseffekten, sind sie von der Ähnlichkeitsgeometrie von $(M, \mathcal{A})$ wesentlich zu unterscheiden. Daß durch (i)–(iii) auf $(M, \mathcal{A})$ im Prinzip stets dieselbe Geometrie erklärt wird, ergibt sich daraus, daß sich das Zustandekommen in jedem der drei Fälle durch einen analogen Verlängerungsprozess derjenigen Karten von $\mathcal{A}$ beschreiben läßt, die zu einer globalen Karte mit Holonomiestreckenzentrum 0 (vgl. D.3.3) gehören. Solche Karten (U_i, ϕ_i) werden zu Karten $(U_i, \log \circ \phi_i)$ transformiert, sofern

$\phi_i(U_i) \subset C - \{z \in C \mid \Re(z) < 0, \Im(z) = 0\}$ gilt. Für (ii) folgt das aus 1.7, bei (i) aus D.4.6(i) und für (iii) ergibt sich das aus dem Umstand, daß Log den Raum $\tilde{C}^*$ (und nach D.5.3/A.2.17(v) damit die universelle Überlagerung von M) nach A.2.8(iii)/A.2.9 biholomorph auf C abbildet (und damit auf eines der drei nach 1.2 für die Geometrisierung der riemannschen Flächen zu benutzten Gebiete). $\square$

§2: Die Geometrie der euklidischen Ähnlichkeitstori

Wie in §1 (insbes. 1.2/1.9) deutlich geworden ist, sind Räume, die die Geometrie von euklidischen Ähnlichkeitstori tragen, bereits untersucht worden, und zwar hat man im Zuge der Untersuchung der riemannschen Flächen all jenen Flächen, welche Tori sind, genau eine jener Geometrien zugeordnet (vgl. 1.9). Wir möchten daher im folgenden,

um den von uns abgeleiteten Aussagen über die Geometrie der echten Ähnlichkeitstori ihre Analoga gegenüberzustellen, die wichtigsten Aussagen über die Geometrie der euklidischen Ähnlichkeitstori mit Quellenangabe auflisten.

1. Die euklidischen Ähnlichkeitstori haben stets ein Fundamentalsystem von Kurven, die Geraden sind und (ohne einen Knick zu bilden) in sich zurücklaufen. Ein solches Fundamentalsystem ist z.B. durch den Rand des parallelogrammförmigen Fundamentalbereichs gegeben, den jeder euklidische Ähnlichkeitstorus nach A.2.4/A.2.6/D.2.8 hat.
2. Als Folge der in B.4.1 konstruierten Gruppe strukturerhaltender Autohomöomorphismen ergibt sich, daß die geometrischen Aussagen über ein solches Fundamentalsystem nicht von dem Aufpunkt, zu dem es konstruiert wurde, abhängen.
3. Das Längenverhältnis und der Winkel zwischen der kürzesten zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrenden Geraden und der nächstkürzeren in einer anderen Richtung verlaufenden ebenfalls zurückkehrenden Geraden bilden geometrische Invarianten, durch die die euklidischen Ähnlichkeitstori unterschieden werden können. Diese Größen sind nämlich Argument und Betrag des Torusmoduls μ , durch den in 1.3(iii) die euklidischen Ähnlichkeitstori klassifiziert wurden.
4. Bis auf eine dünne, in den nachfolgenden Punkten (5.)–(7.) zu beschreibende Ausnahmемenge bestehen bei den euklidischen Ähnlichkeitstori die strukturerhaltenden Autohomöomorphismen neben der in B.4.1 konstruierten einfach transitiv operierenden Gruppe nur aus 180° -Drehungen um jeden Punkt. Dies ergibt sich aus einer Diskussion der Symmetrien, die ein Gitter aufweist (siehe [Zie].21.14).
5. Bei denjenigen Ähnlichkeitstori, deren Torusmodul μ den Betrag 1 hat, d.h. bei denen die kürzesten zum Ausgangspunkt zurückkehrenden Geraden gleich lang sind, ist jedoch jeweils zusätzlich eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden dieser Geraden als orientierungsverkehrende Symmetrie möglich. Ist der Realteil des Torusmoduls $= \frac{1}{2}$, so kann der Torus an der kürzesten Geraden auch auf sich selbst gespiegelt werden.
6. Darüberhinaus hat derjenige euklidische Ähnlichkeitstorus mit $\mu = i$, dessen Fundamentalbereich ein Quadrat ist, auch eine Symmetrie der Drehung um 90° (siehe [Zie].21.14(b)).
7. Derjenige euklidische Ähnlichkeitstorus mit $\mu = \sqrt[3]{-1}$, dessen Fundamentalbereich aus zwei aneinandergeklebten gleichseitigen Dreiecken besteht, hat darüberhinaus noch eine Drehung um 60° bzw. 120° als Symmetrie. Dies ist zugleich der einzige euklidische Ähnlichkeitstorus, bei dem es mehr als zwei (nämlich drei) gleichberechtigte Richtungen von kürzesten zu ihrem Ausgangspunkt zurückkehrenden Geraden gibt (siehe [Zie].21.14(b)).

§3: Liste der Ähnlichkeitstori

Die nachfolgende Liste eines Repräsentantensystems aller Ähnlichkeitstori, die ja nach A.4.1 zugleich einer Liste aller geschlossenen orientierten Mannigfaltigkeiten mit $(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ -Struktur ist, basiert im wesentlichen auf den Klassifikationen in D.5.2 und

der in A.2.4/A.2.15/1.6 beschriebenen Standarddarstellung. Nachfolgende Liste entsteht dann, indem man für alle Gruppen $\text{Exp}(H)$, wobei H gemäß A.2.15/A.2.14(1) die Gitter in $\mathbb{C}$ durchläuft, ein Erzeugendensystem wählt. Bei der Wahl dieser Erzeugendensysteme halten wir uns an die Darstellung aus 1.6, um auf die Weise zu erreichen, daß der μ -Parameter als Torusmodul jeweils zugleich die zugehörige Strukturklasse riemannscher Flächen beschreibt. Wenn wir dann noch die am Ende des Beweises von 1.8 angedeuteten Symmetrieüberlegungen aller Gitter zu Ende führen, durch die auch die Aussagen 2.0(4.)–2.0(7.) entstanden sind, erhalten wir:

3.1 Satz: Die Strukturklassen aus $\text{WST}(\text{Aut}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ werden wie folgt repräsentiert:

▷ Euklidische Ähnlichkeitstori:

Klassifikation durch:

$$\mu \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \Im(z) > 0, -\frac{1}{2} < \Re(z) \leq +\frac{1}{2}\} \cup \\ \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \Im(z) > 0, 0 \leq \Re(z) \leq \frac{1}{2}\},$$

Standarddarstellung durch: $(\mathbb{C}/\langle 1, \mu \rangle, \widetilde{\mathcal{A}}_{\langle 1, \mu \rangle}^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$.

▷ Echte Ähnlichkeitstori

Klassifikation durch: $(S, \mu) \in$

$$\left((\{T \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \mid |\text{Cpl}(T)| > 1\} \cup \{T \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \mid |\text{Cpl}(T)| = 1, \text{Arg}(T) > 0\}) \times \right. \\ \left. (\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \Im(z) > 0, -\frac{1}{2} < \Re(z) \leq +\frac{1}{2}\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1, \Im(z) > 0, 0 < \Re(z) < \frac{1}{2}\}) \right) \\ \cup \left(\{T \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \mid |\text{Cpl}(T)| > 1, \text{Arg}(T) \geq 0\} \times \{i\} \right) \\ \cup \left(\{T \in \widetilde{\mathbb{C}}^* \mid \sqrt{3} \cdot \ln(|\text{Cpl}(T)|) > \text{Arg}(T) \geq 0\} \times \left\{ \frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right\} \right),$$

Standarddarstellung durch: $\Gamma_{\text{Cpl}}(\widetilde{\mathbb{C}}^*/\langle S, S^\mu \rangle), \text{Cpl}(\widetilde{\mathcal{A}}_{\langle S, S^\mu \rangle}^{\text{Aut}(\mathbb{C})})$.

Literatur

- [BeSo] BEHNKE, H., SOMMER, F.: "Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen", Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften Bd. 77, Springer, Berlin, 3. Auflage 1972
- [BPZ] BETLEY, S., PRZYTICKI, J. H. and ŻUKOWSKI, T.: "Hyperbolic Structures on Dehn Filling of some Punctured-Torus Bundles over S^1 ", Kobe Jour. of Math., 3 (1986), p. 117-147
- [CrM] do CARMO, M. P.: "Differential Geometry of Curves and Surfaces", Prentice-Hall, Englewood Cliffs (New Jersey), 1976
- [Dav] DAVENPORT, H.: "The Higher Arithmetic", Cambridge University Press, Cambridge, Fifth Edition 1982
- [FL] FISCHER, W., LIEB, I.: "Funktionentheorie", Aufbaukurs Mathematik, Vieweg, Braunschweig, 1980
- [Fricke] FRICKE, R.: "Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen", Teubner, Leipzig und Berlin, 1916
- [Kin1] KLEIN, Felix: "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", Math. Ann., 43 (1893) p. 64-100
- [Li] LICKORISH, "W. B. R.: A Representation of Combinatorial 3-manifolds", Ann. Math., Vol. 76, No. 3 (1962), p. 531-540
- [Mil] MILNOR, J.: "Morse Theory", Annals of Mathematical Studies No. 51, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), Second printing 1965
- [Munk] MUNKRES, J. R.: "Elementary Differential Topology", Annals of Mathematical Studies No. 54, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), Revised edition 1966
- [Poi1] POINCARÉ, H.: "Second complément à l'Analysis situs", Proc. London Math. Soc., 32 (1900) p. 277-308
- [Poi2] —, "Cinquième complément à l'Analysis situs", Rend. Circ. Math. Palermo, 18 (1904), p. 45-110
- [Rinow] RINOW, W.: "Die innere Geometrie der metrischen Räume", Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Bd. 105, Springer, Berlin, 1961
- [Sc] SCOTT, Peter: "The Geometries of 3-manifolds", Bull. Lond. Math. Soc., 15 (1983), p. 401-487
- [Span] SPANIER, E. H.: "Algebraic Topology", McGraw-Hill, New York 1966
- [StZ] STÖCKER, R., ZIESCHANG, H.: "Algebraische Topologie", Mathematische Leitfäden, Teubner, Stuttgart, 1988
- [Th0] THURSTON, W. P.: "The Geometry and Topology of 3-manifolds", preprint, to appear Princeton university press 1982
- [Th1] —, "Three-dimension Manifolds, Kleinian Groups and Hyperbolic Geometry", Bull. Am. Math. Soc. 6 (1982), p. 357-381
- [Th2] —, "Hyperbolic Structures on Three-manifolds I: Deformations of Acylindrical Manifolds", to appear in Annals of Mathematics
- [Zas] ZASTROW, A.: "Transitivity Domains of Groups of Similarities", manuscript. math. 61 (1988) p. 373-382

Literatur

[Zie] ZIESCHANG, H.: "Finite Groups of Mapping Classes of Surfaces", Lecture Notes in Mathematics No. 875, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1981

Lebenslauf

- 31.7.1961 : geboren in Frankfurt am Main
- 1967–1971 : Grundschule in Frankfurt am Main
- 1971–Dez. 1979 : Besuch der Musterschule, eines Gymnasiums in Frankfurt am Main
- Dezember 1979 : Abitur
- April 1980–Febr. 1981 : Beginn des Studiums der Mathematik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität in Frankfurt am Main
1. 3. 1981–30. 6. 1982 : Zivildienst
- April 1982–Sept. 1985 : Fortsetzung des Studiums der Mathematik an der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität
27. Sept. 1985 : Diplom
- Seit 1. Okt. 1985 : angestellt als wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Ruhr-Universität Bochum

